YA. SAVCHENKO

PROBLEMAS DE FISICA

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Под редакцией О. Я. Савченко

Издательство «Наука»
Москва

Problemas de FISICA

Dirigido por O. Ya. Sávchenko

Editorial Mir Moscú

Autores: Vorobiev I. I., Zubkov P. I., Kutuzova G. A., Sávchenko O. Ya., Trubachov A. M., Jaritónov V. G.

Traducido del ruso por Consuelo Fernández Álvarez, licenciada en Ciencias Físicas

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000681-8

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1984

© traducción al español de la edición rusa revisada, editorial Mir, 1989

INDICE

	Prob.	Resp.
Prefacio	7	
Constantes físicas	9	
Capítulo 1. Cinemática	10	314
§ 1.1. Movimiento a velocidad constante	10	314
§ 1.2. Movimiento a velocidad variable	15	315
§ 1.3. Movimiento en el campo gravitatorio. Movimiento curvilíneo	19	318
§ 1.4. Transformación de Galileo	23	319
§ 1.5. Movimiento con enlaces	26	320
Capítulo 2. Dinámica	30	321
§ 2.1. Leyes de Newton	30	321
§ 2.2. Impulso. Centro de masas	41	323
§ 2.3. Trabajo. Energía	47	325
§ 2.4. Principios de conservación de la energía y el impulso (cantidad de movimiento)	58	327
§ 2.5. Gravitación. Leyes de Kepler	63	329
§ 2.6. Rotación de un sólido	67	330
§ 2.7. Estática	76	332
Capítulo 3. Oscilaciones y ondas	84	333
§ 3.1. Pequeñas desviaciones del equilibrio	84	333
§ 3.2. Período y frecuencia de las oscilaciones libres	87	333
§ 3.3. Movimiento armónico	95	335
§ 3.4. Adición de las oscilaciones	100	336
§ 3.5. Oscilaciones forzadas y amortiguadas	104	337
§ 3.6. Deformaciones y tensiones. Velocidad de las ondas	110	341
§ 3.7. Propagación de las ondas	115	342
§ 3.8. Adición y reflexión de las ondas	118	343
Capítulo 4. Mecánica del líquido (fluido)	124	347
§ 4.1. Presión del líquido	124	347
§ 4.2. Flotación. Principio de Arquímedes	129	348
§ 4.3. Movimiento del líquido perfecto	134	349
§ 4.4. Flujo de un líquido viscoso	137	351
§ 4.5. Tensión superficial de un líquido	138	351
§ 4.6. Fenómenos de capilaridad	143	352
Capítulo 5. Física molecular	146	353
§ 5.1. Movimiento térmico de las partículas	146	353
§ 5.2. Función de distribución	147	353
§ 5.3. Colisión de las moléculas. Fenómenos de transferencia	151	354
§ 5.4. Gases enrarecidos. Interacción de las moléculas con la superficie del sólido	153	355
§ 5.5. Ecuación de estado de un gas perfecto	156	355
§ 5.6. Primer principio de la termodinámica. Capacidad calorífica	159	356
§ 5.7. Salida del gas	164	357
§ 5.8. Probabilidad del estado termodinámico	165	357
§ 5.9. Segundo principio de la termodinámica	168	357
§ 5.10. Transiciones de fase	171	358
§ 5.11. Radiación térmica	174	359

Capítulo 6. Electrostática	177	359
§ 6.1. Ley de Coulomb	177	359
§ 6.2. Intensidad del campo eléctrico	180	360
§ 6.3. Presión eléctrica. Energía del campo eléctrico	185	362
§ 6.4. Conductores en el campo eléctrico constante	189	363
§ 6.5. Potencial del campo eléctrico	192	364
§ 6.6. Condensadores	197	365
§ 6.7. Campo eléctrico en presencia de un dieléctrico	201	366
Capítulo 7. Movimiento en un campo eléctrico	206	367
§ 7.1. Movimiento en un campo eléctrico constante	206	367
§ 7.2. Movimiento en un campo eléctrico alterno	212	368
§ 7.3. Interacción de las partículas cargadas	215	369
Capítulo 8. Corriente eléctrica	220	371
§ 8.1. Corriente. Densidad de corriente. Corriente en el vacío	220	371
§ 8.2. Conductibilidad. Resistencia. Fuentes de fem	223	372
§ 8.3. Circuitos eléctricos	229	374
§ 8.4. Condensadores y elementos no lineales en los circuitos eléctricos	238	376
Capítulo 9. Campo magnético permanente	243	377
§ 9.1. Inducción del campo magnético. Influencia del campo magnético sobre la corriente	243	377
§ 9.2. Campo magnético de una carga en movimiento. Inducción del campo magnético de la corriente lineal	246	377
§ 9.3. Campo magnético de una corriente, distribuida por un plano o volumen	250	379
§ 9.4. Flujo magnético	254	381
Capítulo 10. Movimiento de las partículas cargadas en campos complejos	257	382
§ 10.1. Movimiento en los campos eléctrico y magnético	257	382
§ 10.2. Movimiento a la deriva de las partículas	261	384
Capítulo 11. Inducción electromagnética	264	384
§ 11.1. Movimiento de los conductores en un campo magnético permanente. Motores eléctricos	264	384
§ 11.2. Campo eléctrico rotacional	270	385
§ 11.3. Inductancia mutua. Inductancia de los conductores. Transformadores	274	386
§ 11.4. Circuitos eléctricos de corriente alterna	277	387
§ 11.5. Conservación del flujo magnético. Superconductores en un campo magnético	281	388
§ 11.6. Enlace entre el campo eléctrico alterno y el magnético	285	390
Capítulo 12. Ondas electromagnéticas	288	391
§ 12.1. Propiedades, emisión y reflexión de las ondas electromagnéticas	288	391
§ 12.2. Propagación de las ondas electromagnéticas	295	395
Capítulo 13. Optica geométrica	299	396
§ 13.1. Propagación rectilínea y reflexión de la luz	299	396
§ 13.2. Refracción de la luz. Lentes ópticas	301	397
§ 13.3. Sistemas ópticos	304	398
§ 13.4. Fotometría	307	399
§ 13.5. Naturaleza cuántica de la luz	311	400
Apéndices	401	

PREFACIO

Los autores de este libro, colaboradores científicos de la Sección Siberiana de la Academia de Ciencias de la URSS y profesores de la primera escuela en el país, especializada en matemáticas y física, adjunta a la Universidad de Novosibirsk, intentaron crear no simplemente un compendio de problemas, sino un manual con el fin de solidificar los vínculos de la enseñanza escolar con la ciencia moderna.

El libro contiene más de dos mil problemas de diversa complejidad: desde los corrientes escolares hasta los propuestos en las olimpiadas, que requieren cierta perspicacia e imaginación original. A diferencia de los compendios análogos, editados en los últimos años, en el que presentamos (a rara excepción) no se exponen las soluciones de los problemas, se dan solamente las respuestas. Semejante forma es más natural para el estudio activo y creador de la física, pues el camino a la respuesta no es otra cosa que una búsqueda científica individual y atrayente. Ese proceso creador no debe sustituirse por el examen de las recetas de la solución de los problemas.

Casi todos los problemas que figuran en el libro fueron tomados de los compendios de problemas de física, pertenecientes a estos mismos autores, y editados en la Universidad de Novosibirsk para los alumnos de la escuela físico-matemática. Por esta razón, una atención peculiar se presta a los temas que son importantes para la instrucción exitosa en los centros de enseñanza superior. Así, por ejemplo, se amplió de modo notorio la parte de problemas concernientes a las oscilaciones y ondas, a la física molecular, al movimiento de las partículas cargadas y a las ondas electromagnéticas. Es la primera prueba de recopilar un manual de semejante tipo, por eso fue necesario crear de modo especial muchos problemas para uno u otro tema. Nos prestaron gran ayuda los colaboradores de los institutos de la Sección Siberiana de la Academia de Ciencias de la URSS. Por ejemplo, los colaboradores del Instituto de Hidrodinámica elaboraron el tema: salida de chorros complejos (§§ 4.3 y 4.4)

y propusieron la mayoría de los problemas, relacionados con el principio de conservación del flujo magnético (§ 11.5). Los colaboradores del Instituto de Física Nuclear compusieron muchos problemas sobre el movimiento de las partículas cargadas en los campos eléctrico y magnético. Además, el libro posee multitud de problemas propuestos en las olimpiadas de Siberia y en los exámenes de ingreso a la Universidad de Novosibirsk. También fueron incluidos varios problemas que pertenecen por tradición al curso de la física general en los centros de enseñanza superior, no obstante, el carácter de las enunciaciones y el orden de su seguimiento permiten hallar su solución dentro de los márgenes del curso escolar. Una serie de problemas bien conocidos proviene de otros compendios para escolares, pero constituyen la menor parte del número total de problemas.

El libro está dividido en trece capítulos que, a su vez, se subdividen en párrafos. En cada párrafo, en la medida que eso corresponde a la lógica del desarrollo del tema, tras problemas relativamente elementales se proponen otros más difíciles y, por regla general, los más interesantes. Los problemas de mayor utilidad para el alumno son los que provocan su vivo interés, instigan a reflexionar sobre el fenómeno físico, desarrollan la capacidad de pensar independientemente, enseñan a estar preparados a un planteamiento no estereotipado del problema y a una solución original. El libro contiene muchos problemas de ese género. Esperamos que en caso de que algunos de ellos resulten muy difíciles para el alumno, éste no perderá la fe en sus fuerzas, sino que le incitarán a que estudie la física con mayor profundidad. Semejantes problemas se señalan con frecuencia con un asterisco y a veces se ofrece una solución breve de ellos. Para comprender mejor el planteamiento de muchos problemas, éstos se ilustran con figuras que en algunas ocasiones vienen agrupadas en páginas separadas.

El libro está destinado a los estudiantes que asisten a los cursos preparatorios para el ingreso a los centros de enseñanza superior, a los alumnos de las escuelas y clases físico-matemáticas especializadas y a todos aquellos que quieren en el futuro estudiar la física en los centros de enseñanza superior y, posiblemente, elegirla como profesión.

O. Ya. Sávchenko

CONSTANTES FISICAS

Denominación	Designación	Valor
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2{,}99 \cdot 10^{8}$ m/s
Constante magnética	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m = $= 12{,}56 \cdot 10^{-7}$ H/m
Constante dieléctrica	$\varepsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1}$	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m
Constante de Planck	h	$6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J/Hz
Masa en reposo del electrón	m_e	$9{,}10 \cdot 10^{-31}$ kg
del protón	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg
del neutrón	m_n	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg
Razón entre la masa del protón y la masa del electrón	m_p/m_e	1836,15
Carga elemental	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C
Razón entre la carga del electrón y su masa	e/m_e	$1{,}75 \cdot 10^{11}$ C/kg
Momento magnético del electrón	μ_e	$9{,}28 \cdot 10^{-24}$ J/T
Número de Avogadro	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Unidad de masa atómica	1 uma	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
Constante de Faraday	$F = N_A e$	96 484,56 C/mol
Constante de los gases	R	8,31 J/(mol·K)
Cero de la escala de Celsius	T_0	273,15 K
Presión normal	p_0	$1{,}01 \cdot 10^{5}$ Pa
Volumen de un mol de gas perfecto en condiciones normales	$V_m = RT_0/p_0$	$22{,}41 \cdot 10^{-3}$ m^3/mol
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K
Constante de Stefan — Boltzmann	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^2 × × K^4)
Constante de la gravitación	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N × × m^2/kg^2
Aceleración normal de la caída libre	g_n	9,80 m/s^2

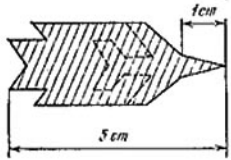
PROBLEMAS

Capítulo 1

CINEMÁTICA

§ 1.1. Movimiento a velocidad constante

1.1.1. En la figura se da una «fotografía» borrosa de un avión reactor en vuelo. La longitud del avión es de 30 m y la de la sección de nariz, de 10 m. Haciendo uso de esta «fotografía», determínese la velocidad del avión. El tiempo de exposición del obturador es de 0,1 s. La línea de trazos muestra en la figura la forma del avión.



Para el problema 1.1.1.

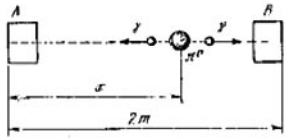
1.1.2. El radar determina las coordenadas de un avión, midiendo el ángulo α entre la dirección hacia el Polo Norte y la dirección hacia el avión, asimismo la distancia R desde el radar hasta el avión. Cuando el operador del radar detectó el avión, su posición se determinaba mediante las coordenadas $\alpha_1 = 44°$, $R_1 = 100$ km. Al cabo de 5 s el operador midió de nuevo sus coordenadas. Resultó que $\alpha_2 = 46°$, $R_2 = 100$ km. Represéntese la posición del avión en los dos momentos de tiempo, determínense el módulo y la dirección de su velocidad en el sistema cartesiano de coordenadas con el eje y dirigido hacia el norte y con el radar en el origen de coordenadas. El ángulo cuéntese en sentido de las agujas del reloj.

1.1.3. Por una ventana abierta a la habitación entra volando un escarabajo. La distancia entre el escarabajo y el techo cambia con una velocidad de 1 m/s, entre aquél y la pared de fondo, 2 m/s y entre el mismo y la pared lateral, 2 m/s. Al cabo de 1 s el escarabajo chocó con el rincón entre el techo y la pared lateral de la habitación. Determínense la velocidad de vuelo de escarabajo y el lugar en la ventana por el que éste penetró a la habitación. La altura de la habitación es de 2,5 m, la anchura, 4 m y la longitud, 4 m.

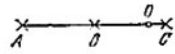
1.1.4. Los contadores A y B (que registran el momento de la llegada del rayo gamma) distan 2 m. Entre ellos tuvo lugar la desintegración de la partícula mesón π^0 en dos rayos gamma. ¿En qué lugar sucedió la desintegración si el contador A registró el rayo

gamma 10^{-9} s más tarde que el contador B? La velocidad de la luz adóptese igual a $3 \cdot 10^8$ m/s.

1.1.5*. Tres micrófonos, situados en una recta en los puntos A, B y C, registraron en los momentos de tiempo $t_A > t_B > t_C$ el



Para el problema 1.1.4.



Para el problema 1.1.5*

sonido de cierta explosión que ocurrió en el punto O, yacente en el segmento AC. Hállese la distancia AO, si $AB = BC = L$. El momento de la puesta en marcha del reloj no corresponde al momento de la explosión.

1.1.6. Unos deportistas corren formando una columna de longitud l con la misma velocidad v. Al encuentro de la columna corre el entrenador a la velocidad u ($u < v$). Cada uno de los deportistas, al encontrarse con el entrenador, da la vuelta y corre hacia atrás con la misma velocidad v. ¿Qué longitud tendrá la columna cuando todos los deportistas den la vuelta?

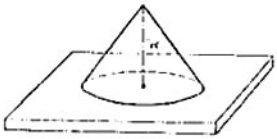
1.1.7. Un submarino que va sumergiéndose uniformemente emite impulsos sonoros de duración T_0. La duración del impulso reflejado del fondo que se percibe es T. La velocidad del sonido en el agua es c. ¿Con qué velocidad v va sumergiéndose el submarino?

Para el problema 1.1.8.

1.1.8. La cinta del transportador se mueve a velocidad c. Sobre la cinta se encuentra un dispositivo automático que arroja n bolas por unidad de tiempo. Las bolas se pegan a la cinta. El contador con una fotocélula registra sólo las bolas que pasan exactamente debajo de él. ¿Cuántas bolas registrará el contador en la unidad de tiempo, si la velocidad del dispositivo automático es v y la del contador es u? Considérese que v y u son menores que c.

1.1.9. a) Una barra de longitud l fue hecha de cierta sustancia explosiva. La velocidad de detonación (la velocidad con que se incorporan nuevas partes de la sustancia explosiva en el proceso de explosión) es v y la velocidad con que se dispersan los productos de la explosión es u ($v > u$). ¿Cómo varía con el tiempo la zona ocupada por los productos de la explosión? Hágase un dibujo.

b) Es necesario hacer de una sustancia explosiva una envoltura cónica de pared fina de manera que, al explotar dicha envoltura, del vértice del cono los productos de explosión choquen simultáneamente contra una chapa horizontal. ¿Qué ángulo α entre el eje del cono y su generatriz es necesario elegir?

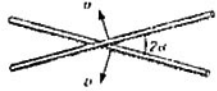


Para el problema 1.1.9b.

1.1.10*. Por una carretera recta se mueve un autobús. Usted puede correr con una velocidad dos veces menor que la del autobús. Usted vio el autobús en el punto A. ¿Desde qué zona en las proximidades de la carretera tendrá tiempo para tomar el autobús?

1.1.11*. Un avión supersónico vuela horizontalmente. Dos micrófonos, que están en reposo a una distancia l el uno del otro y en la misma vertical, han registrado la llegada del sonido del supersónico con un intervalo τ. La velocidad del sonido en el aire es c. ¿Qué velocidad desarrollaba el avión supersónico al sobrevolar los micrófonos?

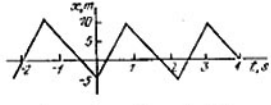
1.1.12. Dos barras se cruzan bajo el ángulo 2α y se mueven con iguales velocidades v y perpendicularmente a sí mismas. ¿Cuál será la velocidad del punto de cruce de las barras?



Para el problema 1.1.12.

1.1.13. Haciendo uso de la gráfica que muestra la dependencia entre la coordenada y el tiempo, constrúyase la gráfica de la dependencia entre la velocidad y el tiempo.

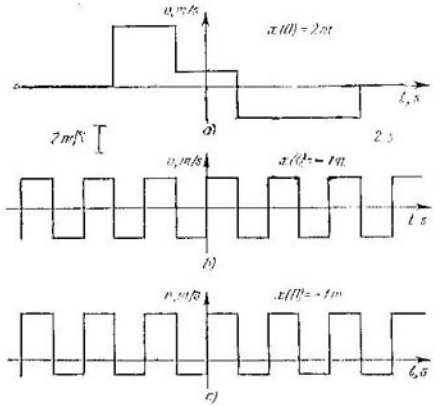
1.1.14. Hállense, aplicando la gráfica de la dependencia entre la coordenada y el tiempo, el lugar y el momento de colisión de dos partículas que se mueven por una misma



Para el problema 1.1.13.

recta. La velocidad de la primera partícula es v y la de la segunda, $v/2$. La primera poseía la coordenada $x = 0$ en el momento $t = 0$, mientras que la segunda partícula en el momento de tiempo τ, la coordenada $x = a$.

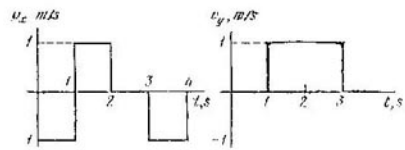
1.1.15. Haciendo uso de la gráfica que muestra la dependencia entre la velocidad y el tiempo, constrúyase la gráfica de la depen-



Para el problema 1.1.15.

dencia de la coordenada respecto al tiempo. Hállese en los casos b) y c) la velocidad media v_m durante un tiempo grande.

1.1.16. Una partícula se mueve por un plano. Aplicando las gráficas que muestran la dependencia de las proyecciones de la

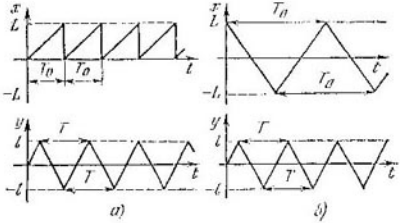


Para el problema 1.1.16.

velocidad v_x y v_y con respecto al tiempo, constrúyase la trayectoria de la partícula si $x\,(0) = 2$ m, $y\,(0) = 1$ m.

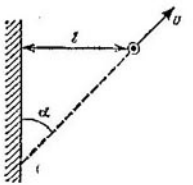
1.1.17. El movimiento de un rayo por la pantalla del osciló grafo se prefija mediante las gráficas de la dependencia entre las coorde-

nadas x e y y el tiempo. ¿Qué línea describe el rayo en la pantalla para $T = T_0$, $T = T_0/3$, $T = 3T_0$? En el caso a) las líneas horizontales casi no se ven en la pantalla. ¿Por qué? ¿Para qué relación entre T y T_0 en el caso b) la línea será cerrada?



Para el problema 1.1.17.

1.1.18. Un automóvil se aleja a la velocidad v de una pared larga bajo cierto ángulo α respecto a ella. Cuando la distancia hasta la pared era l el automóvil dio una señal sonora corta. ¿Qué distancia recorrerá el automóvil hasta el momento en que el chofer oiga el eco? La velocidad del sonido en el aire es c.



Para el problema 1.1.18.

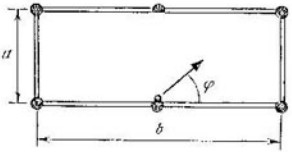
1.1.19. Al chocar elásticamente una bola contra cierta pared inmóvil lisa, el ángulo de incidencia de la bola es igual al de reflexión. ¿En qué ángulo cambiará la dirección de la velocidad de la bola después de chocar dos veces contra dos paredes, el ángulo entre las cuales es igual a α? ¿En qué dirección volará la bola si el ángulo $\alpha = \pi/2$? El movimiento tiene lugar en el plano perpendicular a las paredes.

1.1.20*. En un billar con las barandas a y b se lanza una bola desde el centro del lado b. ¿Para qué ángulos φ ella vuelve al mismo punto de la baranda del que empezó su movimiento?

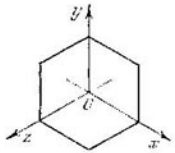
1.1.21. El reflector angular, instalado en el lunajod (vehículo lunar), consta de tres espejos mutuamente perpendiculares. Supongamos que se ha introducido el sistema de coordenadas mostrado en la figura. Si sobre el reflector incide un rayo luz, cuyo vector velocidad es $c = (c_x; c_y; c_z)$, ¿cuál será el vector velocidad del rayo después de reflejarse del espejo que se encuentra en el plano yOz? ¿Cómo será el vector velocidad después de reflejarse de los tres espejos?

1.1.22.* Un tirador tiende a dar en un disco de radio R que se mueve entre dos paredes con tanta rapidez que es difícil seguirlo

con la vista. Trácese la gráfica de la dependencia entre la probabilidad de dar en el disco y la distancia hasta el punto de puntería. Los

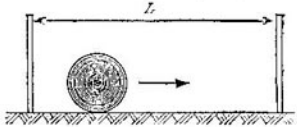


Para el problema 1.20*.



Para el problema 1.1.21.

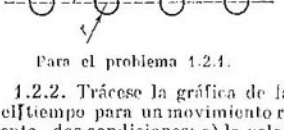
tiros se efectúan a la altura R del suelo perpendicularmente a la dirección del movimiento del disco. ¿En qué lugar la probabilidad será la mínima y en cuál la máxima? ¿A qué son iguales esas probabilidades? Analícense los casos: $L > 4R$, $4R > L > 2R$ (L es la distancia entre las paredes).



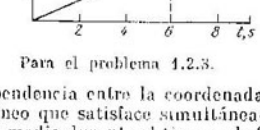
Para el problema 1.1.22*.

§ 1.2. Movimiento a velocidad variable

1.2.1. En la figura se muestra la trayectoria de un electrón que va a la deriva a lo largo del plano de separación de las zonas con distintos campos magnéticos. Su trayectoria consta de semicircunferencias que se turnan de radios R y r. La velocidad del electrón es constante según el módulo e igual a v. Hállese la velocidad media del electrón durante un lapso grande.



Para el problema 1.2.1.

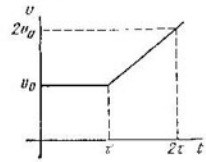


Para el problema 1.2.3.

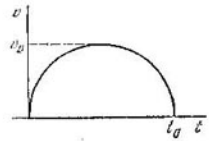
1.2.2. Trácese la gráfica de la dependencia entre la coordenada y el tiempo para un movimiento rectilíneo que satisface simultáneamente dos condiciones: a) la velocidad media durante el tiempo de 2 a 6 s es igual a 5 m/s; b) la velocidad máxima en este mismo tiempo es igual a 15 m/s.

1.2.3. En el instante $t = 0$ dos partículas salen de un mismo punto. Determínense, haciendo uso de las gráficas de la dependencia entre la velocidad y el tiempo, el lugar y tiempo del nuevo encuentro de las partículas. Las partículas se mueven por una misma recta.

1.2.4. Un cuerpo se mueve durante un tiempo τ a una velocidad constante v_0. Luego, su velocidad crece con el tiempo linealmente de manera que en el momento de tiempo 2τ es igual a $2v_0$. Determínese el camino que recorrió el cuerpo durante el tiempo $t > \tau$.



Para el problema 1.2.4.



Para el problema 1.2.5.

1.2.5. La gráfica de la dependencia entre la velocidad de un cuerpo y el tiempo tiene la forma de una semicircunferencia. La velocidad máxima del cuerpo es v_0, el tiempo de movimiento, t_0. Determínese el camino que recorre el cuerpo.

1.2.6. Un autobús se mueve durante 20 s en línea recta hasta la parada. Su velocidad inicial es de 15 m/s y la distancia que recorre es de 310 m. Demuéstrese que la aceleración del autobús varía según la dirección.

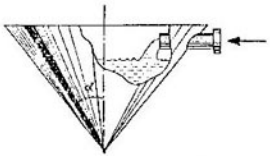
1.2.7. Un patinador recorre la distancia L a velocidad constante y luego frena con una aceleración a hasta pararse. ¿En caso de qué velocidad el tiempo del movimiento del patinador será el mínimo?

1.2.8. Los peces migratorios, después de acumular en el mar cierta reserva de grasa, se encaminan a la desembocadura de los ríos. En el agua dulce ellos no se alimentan. Por esta razón, para ellos es importante llegar hasta los campos de desove en el curso superior del río con pérdidas mínimas de masa. El gasto de grasa en mantener el intercambio principal por unidad de tiempo es N, mientras que el gasto adicional bv^2 se consume para el movimiento a la velocidad v. ¿Con qué velocidad v deben moverse los peces para que el gasto de la grasa en el camino hasta el campo de desove sea el mínimo? (Los peces conocen perfectamente esta velocidad.)

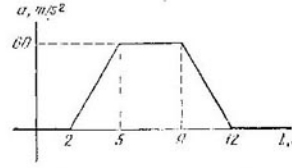
1.2.9. De un acuario esférico de radio R, que contiene agua hasta la mitad, de cada unidad de superficie se evapora por unidad de tiempo un volumen de líquido q. ¿Dentro de cuánto tiempo se evaporará todo el agua?

1.2.10*. a) En un recipiente cónico el nivel de agua se eleva con una velocidad constante v_0. ¿Cómo depende del tiempo la velocidad de entrada del agua al recipiente por un orificio de sección s? En el momento de tiempo nulo el recipiente estaba vacío.

b) Un chorro de aceite que cae sobre la superficie del agua se extiende formando una mancha circular de grosor h. ¿Cómo depende del tiempo la velocidad del movimiento de los extremos de la mancha si en unidad de tiempo ingresa el volumen de aceite q? El radio inicial de la mancha era nulo.



Para el problema 1.2.10*a.

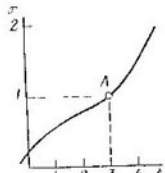


Para el problema 1.2.12.

1.2.11. Un niño está inflando un globo. Cuando el radio de éste tenía el valor de 10 cm, la velocidad con que aumentaba el radio constituía 1 mm/s. ¿Qué volumen de aire por segundo expele el niño?

1.2.12. Haciendo uso de la gráfica de la dependencia entre la aceleración y el tiempo, establézcase la velocidad en los momentos de tiempo de 4 y 15 s, si en el momento de tiempo de 1 s la velocidad era de 3 m/s.

1.2.13. La aceleración de una carretilla cohete, desde el arranque hasta su parada, los primeros 6 s era de 100 m/s², luego 7 s se movió sin aceleración y los últimos 3 s, teniendo una aceleración negativa de —200 m/s². Trácese en una escala adecuada las gráficas de dependencia entre el tiempo y la aceleración, la velocidad y la coordenada. ¿Qué valor máximo de la velocidad alcanzó la carretilla cohete? ¿En qué segmento del trayecto transcurre el frenado? ¿Que distancia total recorrió la carretilla? ¿Cómo, recurriendo a la gráfica de la dependencia entre el tiempo y la aceleración, comprobar si en efecto paró la carretilla?



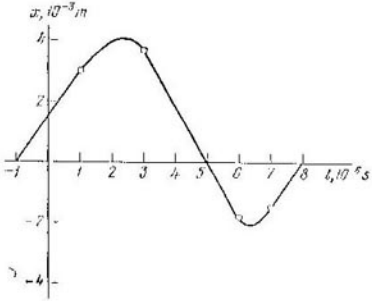
Para el problema 1.2.14

1.2.14. Las gráficas de la dependencia entre la coordenada y el tiempo, pertenecientes a dos partículas, resultaron ser iguales, pero para la primera partícula una división del eje t corresponde a 4 s y para la segunda, a 1 s. ¿En qué relación están las velocidades y aceleraciones de las partículas para el punto A de la gráfica?

1.2.15. La parte de la gráfica de la dependencia entre la coordenada y el tiempo situada por abajo del eje t es semejante a la parte de la gráfica dispuesta por encima de dicho eje. Trácense las gráficas de la dependencia de la velocidad y aceleración respecto al tiempo.

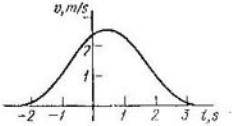
Compárense las aceleraciones para el valor máximo y mínimo de x?

1.2.16. Haciendo uso de la gráfica de la dependencia entre la velocidad y el tiempo, trácense las gráficas de la dependencia de la coordenada y aceleración respecto al tiempo, si $x(0) = 0$.



Para el problema 1.2.15.

1.2.17. La longitud de la escala del velocímetro es de 15 cm; el dispositivo mide la velocidad desde 0 hasta 150 km/h. Hállese la velocidad del indicador del velocímetro, si el automóvil se mueve con una aceleración de 2 m/s².



Para el problema 1.2.16.

Para el problema 1.2.17.

1.2.18.*. El cuerpo comienza su movimiento desde el punto A. Primero el cuerpo se mueve durante el tiempo τ de manera uniformemente acelerada, después con la misma aceleración según el módulo, de manera uniformemente decelerada. ¿Dentro de cuánto tiempo desde el comienzo del movimiento el cuerpo regresará al punto A?

1.2.19*. El tiempo de salida de un tren eléctrico es a las 12.00. Su reloj muestra las 12 en punto, pero ante Usted ya empieza a pasar el penúltimo vagón. Éste tardó en pasar 10 s en tanto que el último vagón pasó ante Vd. en 8 s. El tren eléctrico partió a tiempo y se mueve de manera uniformemente acelerada. ¿En cuánto se atrasa su reloj?

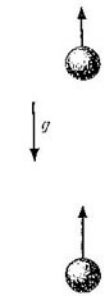
§ 1.3. Movimiento en el campo gravitatorio[1]). Movimiento curvilíneo

1.3.1. De un mismo punto con la velocidad v se lanzan dos bolas verticalmente hacia arriba con un intervalo de tiempo τ. ¿Dentro de cuánto tiempo, después de lanzar la segunda bola, ellas chocarán?

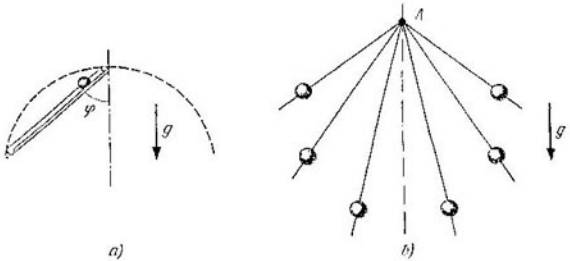
1.3.2. a) Una bola empieza a deslizarse sin fricción desde el punto superior de una circunferencia por una canaleta, inclinada bajo un ángulo φ respecto a la vertical. ¿Dentro de cuánto tiempo la bola alcanzará la circunferencia, si su diámetro es D?

b) Del punto A por los radios inclinados de diferente manera empiezan a deslizarse uniformemente sin fricción unos pequeños abalorios. ¿En qué curva se encontrarán los abalorios en el momento de tiempo t?

1.3.3*. ¿Cómo debe estar dirigida desde el punto A una canaleta inclinada para que una bola se deslice por ella hasta el plano inclinado BB' en el transcurso del tiempo mínimo?



Para el problema 1.3.1.

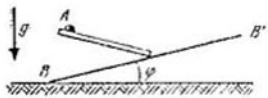


Para el problema 1.3.2.

1.3.4. Un cuerpo que cae libremente pasó el punto A con la velocidad v_A. ¿Con qué velocidad pasará junto al punto B que se encuentra más abajo del punto A distando h?

[1]) Si en la figura del problema se indica la aceleración de la caída libre g, es necesario tener en cuenta el campo gravitatorio.

1.3.5. Se lanza una piedra con velocidad v formando cierto ángulo φ con el horizonte. ¿Dentro de cuánto tiempo la velocidad formará el ángulo α con el horizonte?



Para el problema 1.3.3*.

1.3.6. De un cañón se efectúa un disparo bajo cierto ángulo φ respecto al horizonte. La velocidad inicial del proyectil es v. La superficie terrestre es horizontal.

a) Hállense las proyecciones horizontal y vertical de la velocidad como funciones del tiempo.

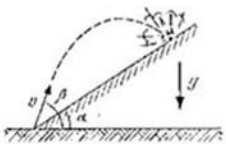
b) Hállense las coordenadas x e y como funciones del tiempo.

c) Hállese la ecuación de la trayectoria, es decir, la dependencia entre x e y.

d) Hállense el tiempo de vuelo T, la altura máxima H y el alcance L del proyectil.

1.3.7. Por un plano inclinado sueltan una bola con la velocidad v. ¿Qué distancia por la horizontal recorrerá la bola antes de deslizarse del plano? El plano está inclinado hacia el horizonte bajo un ángulo de 45°. El vector velocidad forma el ángulo de 45° con el extremo horizontal del plano. Despréciese la fricción.

Para el problema 1.3.7.



Para el problema 1.3.8.

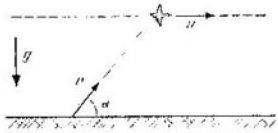
1.3.8. Con un mortero se lleva el fuego contra los objetos situados en la pendiente de una montaña. ¿A qué distancia del mortero caerán las minas, si su velocidad inicial es v, el ángulo de la inclinación de la montaña es α y el ángulo del disparo es β con respecto al horizonte?

1.3.9. ¿Con qué velocidad en el momento de lanzamiento de un cohete es necesario disparar de un cañón para destruir el cohete que se lanza perpendicularmente con la aceleración a? La distancia entre el cañón y el lugar de lanzamiento del cohete es L; el cañón dispara bajo el ángulo de 45° respecto al horizonte.

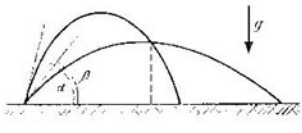
1.3.10. Un pato volaba por una recta horizontal a la velocidad constante u. Un «cazador» inexperto le lanzó una piedra, con la particularidad de que el lanzamiento fue hecho sin corrección del avance, es decir, en el momento del lanzamiento la dirección de la velocidad de la piedra (el ángulo α respecto al horizonte) estaba orientada precisamente hacia el pato. El módulo de la velocidad

inicial de la piedra es igual a v. ¿A qué altura volaba el pato, si la piedra, a pesar de todo, dio con él?

1.3.11. Del orificio de una manga, obturado con el dedo, brotan dos chorros de agua bajo los ángulos α y β respecto al horizonte con



Para el problema 1.3.10.



Para el problema 1.3.11.

una misma velocidad inicial v. ¿A qué distancia con respecto a la horizontal los chorros se intersecan?

1.3.12*. De una manga, yacente en la tierra, brota, formando un ángulo de 45° respecto al horizonte, agua con la velocidad inicial de 10 m/s. El área de la sección del orificio de la manga es igual a 5 cm². Determínese la masa del chorro que se encuentra en el aire.

1.3.13*. De una pieza de artillería es necesario dar en un punto con coordenadas x respecto a la horizontal e y, respecto a la vertical. La velocidad inicial del proyectil es v.

a) Hállese $\mathrm{tg}\varphi$, o sea, la tangente del ángulo, formado por la boca de fuego del cañón y el horizonte.

b) Hállese el límite de la zona donde puede caer el proyectil.

c) ¿A qué valor mínimo de la velocidad v el proyectil puede dar con el punto con coordenadas x, y?

Al resolver el problema a) hágase uso de la identidad $1/\cos^2\varphi = \mathrm{tg}^2\varphi + 1$.

1.3.14. De un mismo lugar con un intervalo de tiempo τ se lanzan dos cuerpos a una misma velocidad inicial v bajo el ángulo φ respecto al horizonte. ¿Qué movimiento describirá el primer cuerpo con relación al segundo?

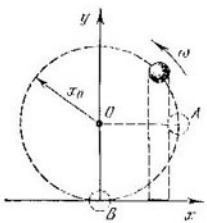
1.3.15. Una bola se lanza por la superficie interior de un cilindro vertical liso de radio R bajo un ángulo α respecto a la vertical. ¿Qué velocidad inicial es necesario comunicar a la bola para que retorne a su punto inicial?

1.3.16. Determínense la velocidad y aceleración que poseen los puntos de la superficie terrestre en el ecuador y en Leningrado, debidas a la participación de la Tierra en la rotación diaria. Considérese el radio de la Tierra igual a 6400 km. La latitud de Leningrado es de 60°.

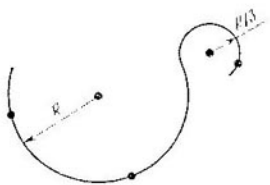
1.3.17. ¿A qué velocidad debe volar un satélite para que, cayendo todo el tiempo hacia la Tierra con una aceleración g, se mueva describiendo una circunferencia? Adóptense el radio de la Tierra $R = 6400$ km y $g = 10$ m/s².

1.3.18. Una partícula se mueve por una circunferencia de radio r de manera que el ángulo de giro del radio vector es ωt en el momento de tiempo t. Muéstrese que el vector velocidad de la partícula gira uniformemente con la velocidad angular ω y el módulo de la velocidad $v = \omega r$. Partiendo de lo anterior, hállense el módulo y la dirección de la aceleración. Escríbase la expresión para la aceleración a en forma vectorial.

1.3.19. Una bola pequeña se mueve con una velocidad angular ω alrededor del punto O describiendo cierta circunferencia de radio x_0. A lo largo del eje y la bola se ilumina con un haz paralelo de luz, por eso la coordenada x de la sombra de la bola depende del tiempo según la expresión $x_0 \cos \omega t$, si en el instante $t = 0$ la bola se hallaba en el punto A, o según la expresión $x_0 \operatorname{sen} \omega t$, si en el instante $t = 0$ la bola se encontraba en el punto B. Hállense en estos casos las dependencias de la velocidad instantánea y la aceleración de la sombra con relación al tiempo.



Para el problema 1.3.19.



Para el problema 1.3.20.

1.3.20. Cierto cuerpo se mueve a velocidad constante v por una trayectoria que consta de dos arcos de las circunferencias con radios R y $R/3$, unidas suavemente. Constrúyanse los vectores aceleración en los puntos indicados de la trayectoria.

1.3.21. En el instante en que el módulo de la velocidad $v = 10^6$ m/s, la aceleración de la partícula $a = 10^4$ m/s^2 y está dirigida formando un ángulo de 30° respecto al vector velocidad. ¿En cuánto aumentará el módulo de la velocidad durante el tiempo $\Delta t = 10^{-2}$ s? ¿En qué ángulo cambiará la dirección de la velocidad? ¿Cuál será para dicho momento la velocidad angular de rotación del vector velocidad?

1.3.22. Un cuerpo se mueve describiendo una circunferencia de radio r a una velocidad que aumenta linealmente con el tiempo: $v = kt$. Hállese la dependencia entre el módulo de la aceleración total del cuerpo y el tiempo.

1.3.23. El extremo de una mesa horizontal está redondeado por una semicircunferencia de radio r. ¿Con qué velocidad mínima es necesario poner en marcha un cuerpo pequeño por la mesa para que éste, al alcanzar la parte redondeada, comience a describir una parábola?

Para el problema 1.3.23.

1.3.24*. El radio de un recipiente esférico que yace en la tierra es R. ¿A qué velocidad mínima en la superficie terrestre una piedra lanzada podrá sobrevolar el recipiente rozando su cúspide?

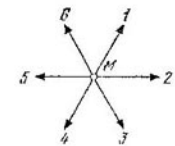
1.3.25. Un proyectil sale volando a la velocidad inicial de 600 m/s bajo un ángulo de 30°, 45°, 60° respecto al horizonte. Determínense los radios de la curvatura de las trayectorias del proyectil en los puntos más alto e inicial.

1.3.26. Para economizar sitio, la entrada a uno de los puentes más altos de Japón está hecha en forma de hélice que enrolla un cilindro de radio R. La vía forma con el plano horizontal un ángulo α. ¿Cuál es la aceleración del automóvil que se mueve a velocidad v constante en módulo?

§ 1.4. Transformación de Galileo

1.4.1. Las posiciones iniciales y los vectores velocidades para dos barcos vienen dados en la figura. Los barcos se mueven sin aceleración. ¿Cómo puede hallarse la distancia mínima entre ellos?

Para el problema 1.4.1.

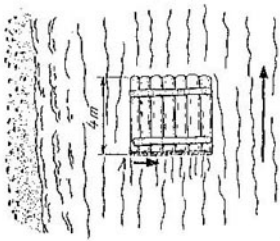


Para el problema 1.4.2.

1.4.2. La figura muestra los vectores velocidades de las seis liebres, que soltó el viejo Mazay, en el sistema de coordenadas, inmóvil respecto a Mazay. Inténtese trazar los vectores velocidades de Mazay y de las demás liebres en el sistema de coordenadas, inmóvil respecto a la liebre 1.

1.4.3. Una de las partículas de una nube de polvo (la partícula A) está en reposo, mientras que todas las demás se dispersan de ella en diferentes direcciones con velocidades, proporcionales a las distancias respecto a la partícula A. ¿Qué cuadro del movimiento verá el observador que se mueve junto con la partícula B?

1.4.4. De la esquina A de una balsa cuadrada salta un perro y nada alrededor de la balsa en la dirección, señalada por la flecha corta. Dibújese la trayectoria del movimiento del perro con respecto a la orilla si la velocidad del animal con relación al agua constituye 4/3 de la velocidad de la corriente.

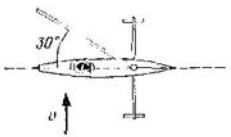


Para el problema 1.4.4.

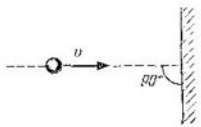
1.4.5. a) Debido a la resistencia del aire las gotas de la lluvia caen con una velocidad constante v, perpendicular a la superficie de la tierra. ¿De qué manera es necesario colocar un cubo cilíndrico, situado en una plataforma en movimiento a una velocidad u, para que las gotas no vayan a caer a la pared?

b) A la velocidad del viento de 10 m/s la gota de lluvia cae bajo un ángulo de 30° respecto a la vertical. ¿A qué velocidad del viento la gota caerá bajo el ángulo de 45°?

1.4.6. El trineo de vela puede moverse solamente por la línea que señalan los patines. El viento sopla con una velocidad v, perpendicular a su movimiento. Mientras tanto, la vela forma con la dirección del movimiento un ángulo de 30°. Determínese la velocidad máxima posible del trineo de vela.



Para el problema 1.4.6.



Para el problema 1.4.8.

1.4.7. ¿Cuál será la duración de un viaje en avión que vuela de Novosibirsk a Moscú y de Moscú a Novosibirsk, si aquél transcurre por una recta y durante todo el vuelo el viento sopla bajo el ángulo α respecto a la ruta con una velocidad u? La velocidad del avión con relación al aire es v y la longitud de la ruta es L. ¿En caso de qué dirección del viento la duración del vuelo será la máxima?

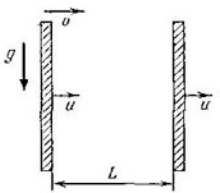
1.4.8. Al chocar elásticamente un cuerpo contra cierta pared inmóvil, la velocidad v cambia sólo de dirección. Determínese en qué valor cambiará la velocidad de este cuerpo después de la colisión si la pared se mueve: a) a una velocidad u al encuentro del cuerpo; b) a una velocidad $w < v$ en dirección del movimiento del cuerpo.

1.4.9. Cierto cuerpo choca contra una pared con la velocidad v, formando un ángulo α respecto a su normal. Determínese el módulo de la velocidad del cuerpo después de chocar elásticamente contra la pared si: a) la pared es inmóvil; b) se mueve a una velocidad w por su normal al encuentro del cuerpo; c) se mueve a la velocidad w, bajo cierto ángulo β respecto a su normal, al encuentro del cuerpo.

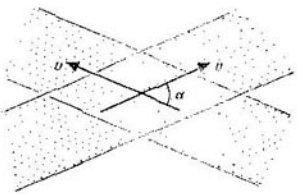
1.4.10. Dentro de una esfera de radio R, que se mueve a una velocidad u, se encuentra una bola de radio r que en el momento de pasar el centro de la esfera poseía la velocidad v (u es perpendicular a v). La masa de la esfera es mucho mayor que la masa de la bola. Determínese con qué frecuencia la bola choca contra la pared de la esfera si la colisión se considera absolutamente elástica.

1.4.11. Cierto cuerpo se deja caer en el campo de gravedad a la altura h respecto de una plancha que se mueve verticalmente hacia arriba con la velocidad u. Determínese el tiempo entre las colisiones sucesivas del cuerpo contra la plancha. Las colisiones son absolutamente elásticas.

1.4.12. Un cuerpo irrumpe horizontalmente a la velocidad v en cierto espacio entre dos planos verticales que se mueven a una velocidad u. Determínese la velocidad del cuerpo después de la n-ésima colisión contra la pared delantera. La distancia entre las paredes es L. Las colisiones son absolutamente elásticas.



Para el problema 1.4.12.



Para el problema 1.4.16.

1.4.13. Un engranaje de radio R se coloca entre dos cremalleras paralelas. Éstas se mueven con velocidades v_1 y v_2 una al encuentro de la otra. ¿Cuántas revoluciones por unidad de tiempo realizará el engranaje?

1.4.14. Un núcleo, que vuela con la velocidad v, se divide en dos fragmentos iguales. Determínese el ángulo máximo posible α entre el vector velocidad de uno de los fragmentos y el vector v si, al desintegrarse el núcleo en reposo, los fragmentos poseían la velocidad $u < v$.

1.4.15*. Existe un haz de núcleos idénticos que se mueven paralelamente con la velocidad v. Los núcleos en el haz se desintegran espontáneamente en dos fragmentos iguales. La velocidad de los

fragmentos que se mueven en dirección del haz es igual a $3v$. Hállese la velocidad de los fragmentos que se mueven en dirección perpendicular al haz. Búsquese la dependencia entre el módulo de la velocidad de los fragmentos y el ángulo entre la dirección del movimiento de los fragmentos y la de la velocidad de los núcleos.

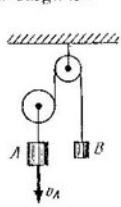
1.4.16. Dos haces de partículas que se mueven con una misma velocidad v, en módulo, se intersecan bajo el ángulo α. Las colisiones transcurren en una zona limitada. Pasemos al sistema de referencia donde las velocidades de las partículas son iguales según el módulo, pero de sentido contrario. Aparentemente parece que ahora la zona de intersección es todo el volumen de los haces y por eso la cantidad de colisiones por unidad de tiempo debería ser mayor. Explíquese la contradicción obtenida.

1.4.17. Llueve «verticalmente». La velocidad de las gotas es u. Una pelota se desliza por el asfalto a la velocidad v. ¿En cuántas veces caerán más gotas por segundo sobre esta pelota que en una inmóvil? ¿Cambiará la respuesta si la pelota no es redonda?

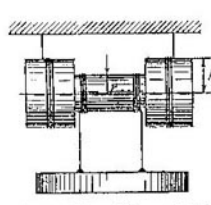
1.4.18*. Un chico, que puede nadar a una velocidad dos veces inferior a la velocidad de la corriente del río, quiere atravesarlo a nado de manera que la corriente se lo lleve abajo lo menor posible. ¿Bajo qué ángulo con respecto a la orilla deberá nadar el chico? ¿A qué distancia se lo llevará abajo la corriente si la anchura del río es de 200 m?

§ 1.5. Movimiento con enlaces

1.5.1. La velocidad de la carga A es igual a v_A. ¿Qué velocidad tendrá la carga B?



Para el problema 1.5.1.

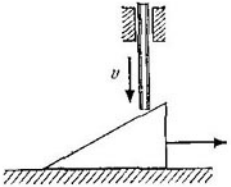


Para el problema 1.5.2.

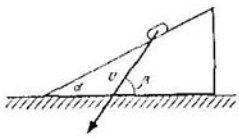
1.5.2. La velocidad angular de la bobina es ω, el radio del cilindro interior es r y de los exteriores, R. ¿Cuáles son las velocidades del eje de la bobina y de la carga con relación a la tierra?

1.5.3. Una cuña forma con el soporte horizontal un ángulo de 30°. Una barra vertical que baja a la velocidad v la «empuja». ¿Qué velocidad desarrollará la cuña?

1.5.4. En una cuña con un ángulo α yace cierta moneda. ¿Con qué aceleración mínima debe moverse la cuña por un plano horizontal para que la moneda caiga libremente hacia abajo?



Para el problema 1.5.3.

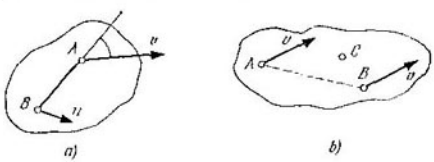


Para el problema 1.5.5.

1.5.5. El vector velocidad de cierto cuerpo, que se desliza por una cuña, se muestra en la figura. Hállese, por vía gráfica, la velocidad de la cuña.

1.5.6. Un cuerpo plano gira alrededor del eje, perpendicular a su plano. Las coordenadas de la posición inicial de los puntos A y B de dicho cuerpo son $(-1; 2)$ y $(3; 1)$, mientras que de la final, $(-3; 1)$ y $(-2; -3)$. Hállense las coordenadas del eje de rotación por vía gráfica.

1.5.7. a) La velocidad del punto A de un sólido es, según el módulo, igual a v y forma con la dirección de la recta AB un ángulo



Para el problema 1.5.7.

de 45°. La velocidad del punto B de este cuerpo es, según el módulo, igual a u. Determínese la proyección de la velocidad del punto B sobre la dirección de AB.

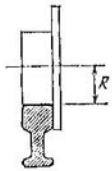
b) Las velocidades de los puntos A y B de un sólido son iguales a v. El módulo de la velocidad del punto C que se encuentra en el plano de la recta AB y del vector v, es u. Hállese la proyección de la velocidad del punto C sobre el eje, perpendicular al plano indicado.

1.5.8. a) Constrúyanse las trayectorias de los puntos de una rueda que se mueve sin deslizamiento por un riel. Examínense los

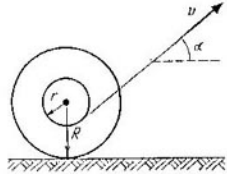
casos cuando los puntos distan del eje de la rueda: $\rho > R$, $\rho = R$ y $\rho < R$.

b) Hállense las aceleraciones de estos puntos. El eje de la rueda se mueve a velocidad constante v.

c) Para un punto que dista $\rho \neq R$ respecto al eje de la rueda, búsquense los radios de la curvatura de la trayectoria en las posiciones superior e inferior.



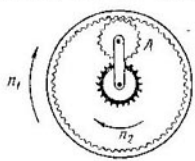
Para el problema 1.5.8.



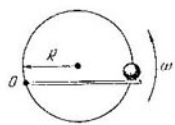
Para el problema 1.5.9*.

1.5.9*. Una bobina rueda por un plano horizontal sin deslizamiento. Del hilo se tira bajo un ángulo α hacia el horizonte con una velocidad v. Hállense la velocidad del eje y la velocidad angular de rotación de la bobina. ¿Para qué ángulos α el eje se mueve hacia la derecha y para cuáles hacia la izquierda? El hilo es tan largo que α no cambia durante el movimiento.

1.5.10. La figura muestra cierta transmisión de engranajes de movimiento planetario. ¿Qué cantidad de revoluciones alrededor de



Para el problema 1.5.10.



Para el problema 1.5.13.

su eje efectuará el engranaje A si la rueda dentada realiza n_1 revoluciones y el engranaje central, n_2 revoluciones? El radio interior de la rueda dentada es R y del engranaje central, r.

1.5.11. Una rueda de radio r se mueve sin deslizamiento por la superficie interna de un cilindro fijo de radio $2r$. Hállese la trayectoria del punto de la llanta de la rueda.

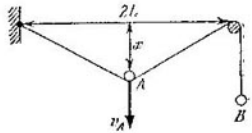
1.5.12. a) La Luna presenta siempre la misma cara a la Tierra. ¿Cuántas revoluciones realizará la Luna alrededor de su eje durante una revolución completa en torno a la Tierra?

b) ¿En cuánto, en término medio, los días sidéreos son más cortos que los solares? La Tierra da la vuelta al Sol en el transcurso de 365,25 días solares.

1.5.13. Un abalorio puede moverse por cierta circunferencia de radio R, empujado por una aguja que gira de forma uniforme a la velocidad angular ω. El eje de rotación de la aguja pasa por el punto O de la circunferencia. ¿Cuál será la aceleración del abalorio?

1.5.14. Una cuerda, que está amarrada a una lancha, se echa sobre un poste. La lancha se mueve a la velocidad v que forma en cierto momento de tiempo un ángulo α con la cuerda. ¿Con qué velocidad es necesario tirar en este instante del cabo libre de la cuerda para que ésta no se pandee?

Para el problema 1.5.14.

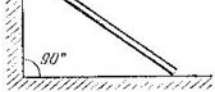


Para el problema 1.5.16.

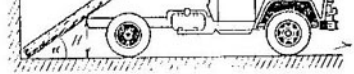
1.5.15. Cuatro tortugas se encuentran en los vértices de un cuadrado con lado a. Ellas comienzan a moverse simultáneamente con una velocidad v, constante en módulo, cada una en dirección a su vecina en sentido de las agujas del reloj. ¿Dónde tendrá lugar el encuentro de las tortugas y al cabo de cuánto tiempo?

1.5.16. Constrúyase la gráfica aproximada de la dependencia entre la velocidad del punto B y el tiempo, si la velocidad v_A del punto A es constante. Hállese la fórmula de esta dependencia si $x(0) = 0$.

1.5.17. Una barra se apoya con sus extremos sobre los lados de un ángulo recto. Su extremo superior va elevándose a la velocidad v. Hállese cómo depende la velocidad del segundo extremo con respecto al tiempo. Tómese el instante en que el extremo superior se encuentra en el vértice del ángulo como punto de referencia. La longitud de la barra es L.

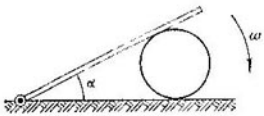


Para el problema 1.5.17.



Para el problema 1.5.18.

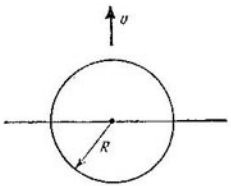
1.5.18. Un tronco se apoya con su extremo inferior sobre la esquina formada por la pared y la tierra y contacta con el fondo del camión a la altura H de la tierra. Búsquese la velocidad angular del tronco en función del ángulo α con la horizontal, si el camión comienza a alejarse a la velocidad v.



Para el problema 1.5.19.

1.5.19. La varilla gira a la velocidad angular ω. No hay deslizamiento entre el cilindro y el plano horizontal. Hállese la velocidad angular del cilindro en dependencia del ángulo α.

1.5.20. Una circunferencia se mueve a la velocidad constante v perpendicularmente a una recta inmóvil. En el instante inicial el centro de la circunferencia yacía en esta recta. Hállese la dependencia entre el tiempo y la velocidad con que se trasladan los puntos de intersección de la circunferencia y la recta.



Para el problema 1.5.20.

Para el problema 1.5.21.

1.5.21. Un rollo de papel se desenrolla de manera que la velocidad del cabo de la cinta de papel es constante e igual a v. En el instante inicial el radio del rollo era R. ¿Qué velocidad angular tendrá el rollo al cabo del tiempo t? El grosor del papel es h.

Capítulo 2

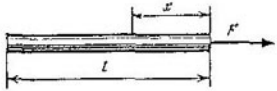
DINÁMICA

§ 2.1. Leyes de Newton

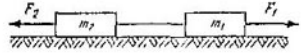
2.1.1. De informaciones fehacientes, una vez el barón Münchhausen al atollarse en un pantano, se sacó a sí mismo de éste por los pelos. ¿Qué leyes de la física supo infringir el barón?

2.1.2. ¿Qué fuerza actúa en la sección de una barra homogénea de longitud l a la distancia x del extremo al que se aplica una fuerza F, dirigida a lo largo de la barra?

2.1.3. Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 están atados por un hilo que puede soportar la tensión T. A los cuerpos se les aplican las fuerzas $F_1 = \alpha t$ y $F_2 = 2\alpha t$ (α es un coeficiente constante y t, el tiempo). Determínese en qué momento de tiempo el hilo se romperá.



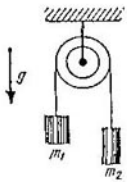
Para el problema 2.1.2.



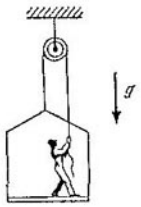
Para el problema 2.1.3.

2.1.4. Hállense las aceleraciones de las cargas y las tensiones de los hilos en el sistema mostrado en la figura. La polea y los hilos son imponderables. Despréciese la fricción.

2.1.5. Un pintor de brocha gorda con masa de 72 kg trabaja en un sillón colgante. Necesita urgentemente elevarse. Con este fin



Para el problema 2.1.4.



Para el problema 2.1.5.

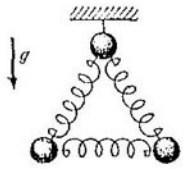
comienza a tirar de la cuerda con una fuerza que su presión sobre el sillón disminuye hasta 400 N. La masa del sillón es de 12 kg. Considérese la aceleración de la caída libre igual a 10 m/s^2. ¿Qué aceleración tendrán el pintor y el sillón? ¿Cuál será la fuerza total que actuará sobre la polea?

2.1.6. Un cohete que despega verticalmente desarrolla un empuje F en el transcurso del tiempo τ, luego el motor se desconecta. Determínese dentro de cuánto tiempo después del despegue el cohete regresará a la Tierra. La masa del cohete es m. Menospréciense la variación de la masa, la resistencia del aire y el cambio de la aceleración de la caída libre.

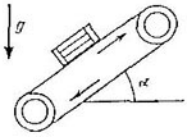
2.1.7*. Un avión reactor de masa m, que desarrolla un empuje F, se desplaza desde el lugar de despegue por una recta, dirigida bajo el ángulo α hacia el horizonte. ¿A qué distancia del lugar de despegue se encontrará el avión dentro del tiempo τ después del despegue? Menospréciense la variación de la masa del avión y la resistencia del aire.

2.1.8. Tres bolas iguales están unidas por muelles imponderables idénticos y suspendidas en un hilo. El hilo se quema. Hállense las aceleraciones de las bolas en el momento en que se quema el hilo.

2.1.9. Tráceso la gráfica de la fuerza de fricción, que actúa sobre un cuerpo por parte del plano horizontal, en dependencia de la fuerza horizontal, aplicada al cuerpo, si éste empieza a moverse cuando la fuerza horizontal se hace mayor que F_0.



Para el problema 2.1.8.



Para el problema 2.1.11.

2.1.10. Una barra de masa m yace sobre una tabla horizontal. Uno de los extremos de la tabla se levanta lentamente. Tráceso la gráfica de la dependencia entre la fuerza de fricción, que actúa sobre la barra, y el ángulo de inclinación de la tabla α. El coeficiente de fricción entre la barra y la tabla es μ y la aceleración de la caída libre, g.

2.1.11. Un elevador de cinta está inclinado formando el ángulo α respecto al horizonte. El coeficiente de fricción entre el cajón y la cinta es μ. ¿Hasta qué aceleración de la cinta el cajón en movimiento no se deslizará por la cinta del elevador? La cinta del elevador no se encorva, $\mu > \operatorname{tg}\alpha$.

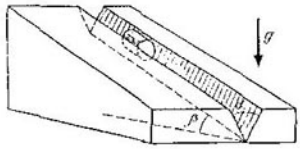
2.1.12. Una fuerza F actúa bajo el ángulo α al horizonte sobre cierto cuerpo de masa m. La fuerza está aplicada en el centro de masas y el coeficiente de fricción es igual a μ. Hállese la aceleración del cuerpo si éste no se desprende del plano.

2.1.13*. Por una pasarela de madera que forma con el horizonte el ángulo α, elevan un cajón arrastrándolo mediante una cuerda. El coeficiente de fricción del cajón con la pasarela es μ. ¿Bajo qué ángulo β respecto al horizonte es necesario dirigir la cuerda para poder arrastrar el cajón con el esfuerzo mínimo?

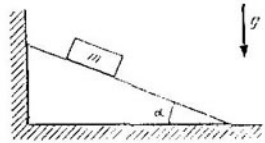
2.1.14. Determíneso la aceleración de un cilindro que se desliza por una canaleta que tiene forma de un ángulo diedro con abertura α. La arista del ángulo diedro está inclinada bajo el ángulo β al horizonte. Los planos del ángulo diedro forman ángulos idénticos con el horizonte. El coeficiente de fricción entre el cilindro y la superficie de la canaleta es μ.

2.1.15. Determíneso la fuerza que ejerce sobre la pared una cuña, al deslizarse de ella cierta carga de masa m. El ángulo de la

base de la cuña es α. El coeficiente de fricción entre la carga y la superficie de la cuña es μ. Despréciese la fricción entre la cuña y el suelo.



Para el problema 2.1.14.

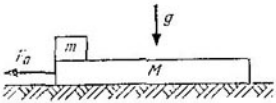


Para el problema 2.1.15.

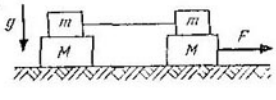
2.1.16. En una tabla de masa M, colocada sobre cierto plano horizontal liso, yace un cuerpo de masa m. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y la tabla es μ.

a) ¿Qué fuerza es necesario aplicar a la tabla para que el cuerpo se deslice de ella? ¿Durante qué tiempo el cuerpo se deslizará, si sobre la tabla ejerce una fuerza F_0 y la longitud de la tabla es l?

b) ¿Con qué aceleraciones se moverán los cuerpos si la fuerza F_0 se aplica al cuerpo de masa m?



Para el problema 2.1.16a.



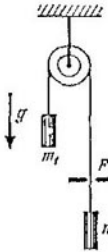
Para el problema 2.1.17.

2.1.17. En una mesa horizontal lisa se encuentra el sistema de cargas mostrado en la figura. El coeficiente de fricción entre las cargas M y m es igual a μ. La carga inferior derecha se arrastra a lo largo de la mesa con la fuerza F, como se indica en la figura. Hállense las aceleraciones para todas las cargas del sistema.

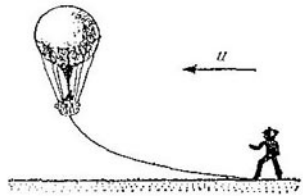
2.1.18. Un hilo imponderable descansa sobre una polea con el eje inmóvil y pasa a través de una rendija. Durante el movimiento del hilo, por parte de la rendija actúa sobre el mismo una fuerza de fricción constante F. En los cabos del hilo se suspenden dos cargas, cuyas masas son m_1 y m_2. Determínense las aceleraciones de las cargas.

2.1.19*. La masa de un globo junto con el cable que se arrastra por la tierra, es igual a M, el empuje es F y el coeficiente de fricción entre la cuerda y la tierra es μ. La fuerza de resistencia del aire, que

actúa sobre el globo, es proporcional a la velocidad del globo v con respecto al aire: $F_{res} = \alpha v$. Hállese la velocidad del globo con relación a la tierra si sopla un viento horizontal a la velocidad u.



Para el problema 2.1.18.



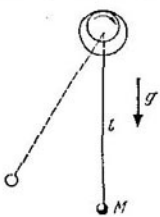
Para el problema 2.1.19*.

2.1.20. La fuerza de fricción de las gotas de lluvia con el aire es proporcional al cuadrado de la velocidad y al cuadrado del radio: $F = \alpha R^2 v^2$. ¿Cuáles de las gotas, las gruesas o las finas, caerán sobre la tierra con mayor velocidad?

2.1.21*. Al modelo de una nave, cuya masa es 0,5 kg, le comunicaron la velocidad de 10 m/s. Durante el ulterior movimiento del modelo, sobre éste actúa la fuerza de resistencia proporcional a la velocidad: $F = kv$ ($k = 0{,}5$ kg/s).

a) Hállese el camino recorrido por el modelo en el transcurso del tiempo al cabo del cual su velocidad disminuyó hasta la mitad.

b) Hálleso el camino que recorrió el modelo hasta pararse.



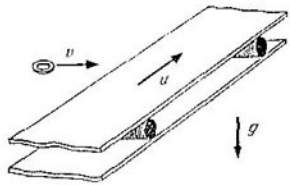
Para el problema 2.1.23.

2.1.22*. Explíquese por qué suena la cuerda del violín al frotarla uniformemente con el arco. Téngase en cuenta la dependencia entre el coeficiente de fricción y la velocidad relativa de las superficies.

2.1.23. Un péndulo representa una ligera varilla de longitud l con una carga en el extremo. Al otro extremo se sujeta un casquillo cilíndrico ligero con radio interno R, insertado en un eje horizontal que gira. El coeficiente de fricción entre el casquillo y el eje es μ. Determínese el ángulo de desviación de la varilla respecto a la vertical en equilibrio.

2.1.24. La cinta del transportador se mueve a la velocidad u. Sobre la cinta cae una arandela, cuya velocidad inicial v es perpen-

dicular al límite lateral de la cinta. Hállese la anchura mínima de la cinta, que corresponda al caso en que la arandela alcanza el otro lado. El coeficiente de fricción entre la arandela y la cinta es μ, la cinta está dispuesta horizontalmente.

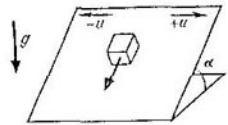


Para el problema 2.1.24.

2.1.25*. Un anillo está montado sobre un cilindro de radio R. El primero puede desplazarse solamente a lo largo del cilindro. Determínese la velocidad estacionaria del anillo bajo la acción de la fuerza F, aplicada al anillo a lo largo del cilindro, si este último gira con una velocidad angular ω. La fuerza de fricción máxima del anillo con el cilindro $F_0 > F$.

2.1.26*. Determínese la velocidad estacionaria del movimiento de un cuerpo, colocado sobre un plano inclinado, si este último varía con mucha frecuencia la velocidad de $-u$ a $+u$. El coefi-

Para el problema 2.1.25*



Para el problema 2.1.26*.

ciente de fricción $\mu > \operatorname{tg}\alpha$; el plano está inclinado bajo el ángulo α al horizonte.

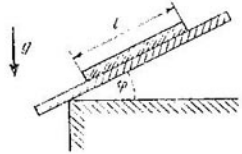
2.1.27*. En un plano inclinado, para el cual $\operatorname{tg}\alpha = \mu$, yace una moneda. A ésta le comunicaron una velocidad v en dirección, perpendicular a la pendiente. Hállese la velocidad estacionaria de la moneda.

2.1.28*. En el tejado con ángulo de inclinación φ yace una hoja de plomo. El coeficiente de fricción del plomo con el tejado $\mu > \operatorname{tg}\varphi$. El coeficiente de dilatación lineal del plomo es α. La longitud de la hoja a temperatura mínima t_1 es igual a l. Considerando que la temperatura durante el día sube, alcanzando el valor máximo t_2 y luego baja de nuevo hasta t_1, hállese el punto inmóvil, tanto para el caso en que la hoja se calienta, como para el que se enfría. ¿A qué distancia se desplazará la hoja durante N días, siendo el tiempo estable?

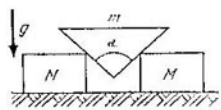
2.1.29*. ¿Dentro de cuántas revoluciones la velocidad de un cuerpo que se mueve en el seno de cierta cavidad esférica, disminuirá e veces? El coeficiente de fricción entre la superficie y el cuerpo

es μ. Menospréciese la influencia de la gravedad sobre el movimiento del cuerpo.

2.1.30. Entre dos barras iguales de masas M se coloca una cuña de masa m con ángulo α. Determínense las aceleraciones de los cuerpos, si no existe fricción.



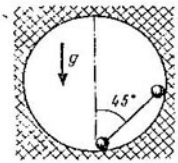
Para el problema 2.1.28*.



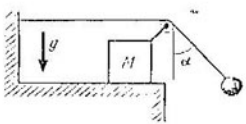
Para el problema 2.1.30.

2.1.31. En una cavidad esférica se ha puesto un halterio (dos bolas de masas m, unidas por una barra imponderable) de la manera mostrada en la figura.

a) Determínense las presiones de las bolas del halterio sobre la esfera cuando a éste lo dejan libre. El ángulo de inclinación de la



Para el problema 2.1.31.



Para el problema 2.1.32*.

barra respecto al horizonte es de 45°. El radio de las bolas del halterio es mucho menor que el radio de la esfera.

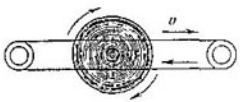
b*) ¿Cómo dependen las presiones sobre la esfera del ángulo de giro del halterio?

2.1.32*. Una carga está colgada del cabo de un hilo, sujeto a la pared y que contornea un rodillo, fijado en una barra de masa M. Esta última puede deslizarse por el plano horizontal sin fricción. En el instante inicial desvían la carga en un ángulo α respecto a la vertical y la dejan libre. Determínese la aceleración de la barra, si el ángulo, formado entre el hilo y la vertical, no cambia al moverse el sistema. ¿Cuál es la masa de la carga?

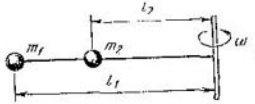
2.1.33*. Una rueda de radio R puede girar libremente alrededor de su eje. Las correas de accionamiento, que se mueven a la velocidad v, se aprietan al plano lateral de la rueda a la distancia h del

eje de rotación. Determínese la velocidad angular estacionaria de la rueda.

2.1.34. En un hilo de longitud l gira cierta carga de masa M con velocidad angular ω. Hállese la tensión del hilo. Menospréciese la fuerza de la gravedad. Sustitúyase el hilo por una barra homogénea



Para el problema 2.1.33*.

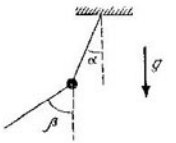


Para el problema 2.1.35.

de masa m. Hállese la tensión de la barra a la distancia x del eje de rotación.

2.1.35. Dos masas m_1 y m_2 giran con la velocidad angular ω. Ellas distan del eje de rotación l_1 y l_2, respectivamente. Determínense las tensiones de los hilos.

2.1.36. Un péndulo doble gira alrededor del eje vertical de manera que los dos hilos yacen en un mismo plano y forman con la vertical ángulos constantes α y β. Las longitudes de los hilos son

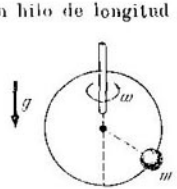


Para el problema 2.1.36.

Para el problema 2.1.37.

las mismas e iguales a l. Hállese la velocidad angular de rotación del péndulo.

2.1.37. Dos bolas idénticas, unidas por un hilo de longitud l, se mueven a velocidades iguales v por una mesa horizontal. El centro del hilo choca contra un clavo. ¿Cuál será la tensión del hilo en el instante en que el hilo haga contacto con el clavo, en caso de que las velocidades de las bolas formen un ángulo α respecto al hilo.



Para el problema 2.1.38.

2.1.38. Una bola pequeña de masa m se pone sobre un anillo liso de alambre de radio R. El anillo junto con la bola comienza a girar alrededor del eje vertical, que pasa por el diámetro del anillo, con la velocidad angular ω. ¿Dónde se dispondrá la bola?

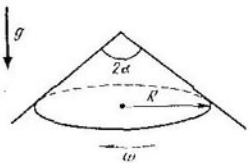
2.1.39*. Un anillo fino de goma con masa m y radio R_0 se hace girar hasta que recibe la velocidad angular ω alrededor de su eje. Hállese el radio nuevo del anillo si la rigidez de la goma es k.

2.1.40. Cierto cuerpo de masa m se encuentra en un disco horizontal distando R del eje. El disco empieza a girar con una velocidad angular que aumenta linealmente con el tiempo $\omega = \varepsilon t$. ¿Al desarrollar qué velocidad angular el cuerpo comenzará a deslizarse, si el coeficiente de fricción entre el cuerpo y el disco es igual a μ?

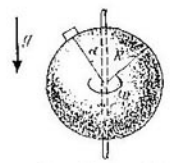
2.1.41. Un patinador en la pista de hielo procura de pasar el viraje lo más cerca posible del borde interior. Un ciclista, al contrario tiende en el velódromo a pasar el viraje lo más lejos posible del borde interior. ¿Cómo se explica esta diferencia en el movimiento del patinador y el ciclista en el viraje?

2.1.42. ¿Con qué velocidad máxima puede moverse por un plano horizontal un motociclista, dando una vuelta de radio R si el coeficiente de fricción entre la goma y el suelo es μ? ¿En qué ángulo respecto a la vertical debe inclinarse el motociclista en este caso? ¿En cuántas veces aumentará la velocidad máxima admisible del movimiento del motociclista por una pista oblicua con el ángulo de inclinación α en comparación con la velocidad máxima admisible por una pista horizontal, siendo igual el radio de la curva?

2.1.43*. ¿Cuál debe ser el coeficiente de fricción de la goma con la superficie interior del cono, cuyo ángulo del vértice es 2α, para que el motociclista pueda moverse por una circunferencia de radio R a la velocidad angular ω?



Para el problema 2.1.43*.



Para el problema 2.1.44.

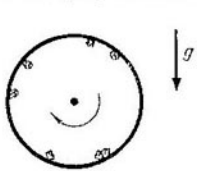
2.1.44. En una superficie esférica de radio R se encuentra un cuerpo. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y la superficie de la esfera es μ y el ángulo entre la vertical y el radio vector del cuerpo, α. ¿Cuál será la velocidad angular máxima de rotación de la esfera, para la cual el cuerpo sigue inmóvil en su superficie? $\mu > \operatorname{tg}\alpha$.

2.1.45*. ¿A qué velocidad angular debe girar alrededor de su eje un cilindro colocado horizontalmente para que las partículas pequeñas dentro del cilindro no se desprendan de su superficie? El coeficiente de fricción entre la superficie del cilindro y las partículas es igual a 1 y el radio interno del cilindro, a R.

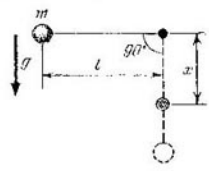
2.1.46. A la bola de un péndulo con masa m le comunicaron

la velocidad mínima, con la cual éste aún permanece oscilando en el plano vertical. ¿Cuál será la tensión del hilo del péndulo al pasar la posición de equilibrio?

2.1.47. A un hilo de longitud l con una bola, unida al mismo, cuya masa es m lo desvían en un ángulo de 90° respecto a la vertical y lo sueltan. ¿A qué distancia mínima x debajo del punto de suspen-



Para el problema 2.1.45*.

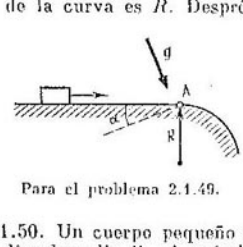


Para el problema 2.1.47.

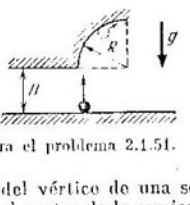
sión es necesario poner el clavo para que el hilo, al chocar con él, se rompa? El hilo soporta una tensión de $T > 3\ mg$.

2.1.48. En un hilo fino está colgada una bola. El hilo se pone en posición horizontal y se deja libre. ¿En qué punto de la trayectoria la aceleración de la bola resulta orientada por la vertical hacia abajo, en cuál por la vertical hacia arriba y por último por la horizontal? En el instante inicial el hilo no está estirado. Hállese la tensión del hilo cuando la carga pasa la posición inferior. La longitud del hilo es l y la masa de la carga, m.

2.1.49. ¿A qué distancia mínima del punto A debemos colocar el cuerpo para que éste en el punto A se desprenda de la superficie y comience a moverse por la trayectoria balística? El ángulo de inclinación del plano, por el que se mueve el cuerpo, es igual a α, el radio de la curva es R. Despréciese la fricción.



Para el problema 2.1.49.

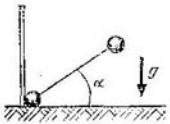


Para el problema 2.1.51.

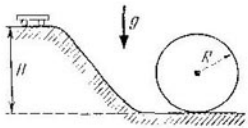
2.1.50. Un cuerpo pequeño se desliza del vértice de una semiesfera lisa de radio R. ¿A qué altura sobre el centro de la semiesfera el cuerpo se desprenderá?

2.1.51. A la altura H sobre la superficie terrestre se encuentra una canaleta cilíndrica de radio R. ¿Qué velocidad es necesario comunicar al cuerpo en la superficie terrestre para que éste se mueva por la canaleta sin desprenderse? La fricción no existe.

2.1.52. Determínese *la fuerza* que ejerce el halterio en movimiento sobre la pared vertical en el instante en que el eje del halterio forma con el horizonte el ángulo α. El halterio comienza su movimiento de la posición vertical sin velocidad inicial. La masa de cada bola del halterio es m [1]).



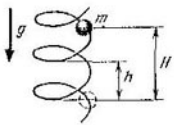
Para el problema 2.1.52.



Para el problema 2.1.53.

2.1.53. La carretilla se desliza por rieles lisos que forman un rizo vertical de radio R. ¿Desde qué altura mínima H_{min} debe deslizarse la carretilla para que no abandone los rieles en toda su longitud? ¿Qué movimiento describirá la carretilla si ésta se desliza de una altura H inferior a H_{min}?

2.1.54*. Un abalorio pequeño de masa m se desliza por una espiral rígida y lisa situada de modo vertical. La distancia entre la espiral y el eje del abalorio es R, el paso de la espiral (la distancia por la vertical entre dos espiras vecinas) es h. ¿Con qué fuerza actuará



Para el problema 2.1.54*.

Para el problema 2.1.55.

el abalorio sobre la espiral en el instante en que se desprenda por la vertical a la distancia H? El abalorio se dejó libre sin velocidad inicial.

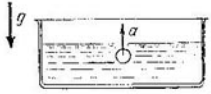
2.1.55. Un sistema de dos masas puntuales M y m, unidas por un hilo imponderable de longitud $l = \pi R$, comienza a deslizarse sin

---

[1]) Si en el problema no se indican el radio de la bola del halterio y la masa de la barra, considérese que el radio de la bola del halterio es mucho menor que la longitud de la barra y la masa de la barra es mucho menor que la masa de la bola.

fricción del cilindro de radio R. En el instante inicial las masas se encontraban en la recta horizontal. ¿Cuál deberá ser la masa M para que el cuerpo de masa m se desprenda del punto superior del cilindro?

2.1.56*. Un cuerpo se desliza de una montaña en el transcurso del tiempo τ. ¿Cuánto tiempo necesitará este mismo cuerpo para deslizarse de una montaña, si aumentamos sus dimensiones, sin cambiar la forma, en 4 veces? Menospréciese la resistencia del aire; los coeficientes de fricción en los dos casos son iguales.



Para el problema 2.1.57.

2.1.57. En un recipiente, que contiene agua de densidad ρ, emerge a la superficie una burbuja de aire de volumen V con la aceleración a. Hállese la presión del recipiente sobre el soporte. La masa del recipiente junto con el agua es M.

§ 2.2. Impulso. Centro de masas

2.2.1. Durante cierto tiempo sobre dos partículas: una de masa m que vuela a velocidad v y la otra de masa $2m$ que vuela a velocidad $2v$, perpendicularmente a la dirección del movimiento de la primera, actúan ciertas fuerzas, iguales en módulo y dirección. En el instante en que cesaron de actuar las fuerzas, la primera partícula comenzó a moverse en sentido contrario a velocidad $2v$. ¿Con qué velocidad empezó a moverse la segunda partícula?

2.2.2. Al sobrevolar un cuerpo de masa m la superficie de la Tierra entre los puntos de la trayectoria A y B el módulo de la variación del impulso del cuerpo es igual a $|\Delta p|$. Hállese el tiempo de vuelo entre A y B. Menospréciese la resistencia del aire.

2.2.3. Una persona corre por una cinta de goma, puesta en dos rodillos horizontales (no existe fricción en los ejes). A primera vista parece que según el principio de conservación del impulso (de la cantidad de movimiento), el impulso de la persona es igual al impulso transmitido a la cinta. Pero es fácil convencerse de que el impulso total de la cinta es nulo. ¿Puede deducirse de eso que la persona no puede desprenderse de la cinta?

2.2.4. ¿Qué masa de combustible es necesario arrojar con la velocidad $3v$ con respecto al cohete de masa M para que su velocidad aumente desde v hasta $1{,}1\,v$?

2.2.5*. Un cuerpo de masa m choca a la velocidad v contra un cuerpo de masa M en reposo. La fuerza, que surge durante la interacción de los cuerpos, crece linealmente durante el tiempo τ desde cero hasta el valor F_0, disminuyendo después linealmente hasta desaparecer en ese mismo tiempo τ. Determínense las velocidades de los cuerpos después de la interacción, considerando que el choque fue central.

2.2.6. Determínese la relación de las masas, pertenecientes a dos cuerpos en colisión, uno de los cuales antes de chocar estaba en reposo, si después de la colisión elástica central los cuerpos se desplazan a velocidades de iguales módulos.

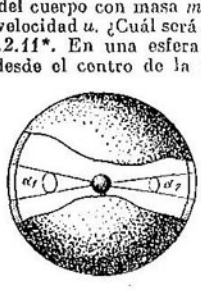
2.2.7. Un proyectil, lanzado bajo un ángulo al horizonte, explota en el punto superior de la trayectoria (distando L del cañón por la horizontal) y forma dos fragmentos iguales. Uno de los fragmentos cae al lado del cañón. ¿Dónde caerá el segundo fragmento, si el primero volvió describiendo la trayectoria del proyectil?

2.2.8. Un artillero dispara de un cañón un bolaño de masa m de manera que vaya a parar al campo enemigo a la distancia L del cañón. En el momento del tiro sobre el bolaño se sienta el barón Münchhausen, cuya masa es $M = 5m$. Determínese qué parte del camino hasta llegar al campo enemigo tendrá que caminar a pie.

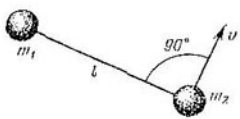
2.2.9. Un cuerpo en movimiento se divide en dos fragmentos con impulsos p_1 y p_2, dirigidos formando el ángulo 0 el uno con el otro. Determínese el impulso del cuerpo desintegrado.

2.2.10. Un cuerpo de masa M que vuela a velocidad u se divide en dos fragmentos, cuyas masas son iguales a m y $M - m$. La velocidad del cuerpo con masa m es v y está dirigida perpendicularmente a la velocidad u. ¿Cuál será la velocidad del cuerpo de masa $M - m$?

2.2.11*. En una esfera se han practicado dos orificios que se ven desde el centro de la esfera bajo los ángulos sólidos α_1 y α_2,



Para el problema 2.2.11*.



Para el problema 2.2.13*.

pequeños pero no iguales. En el centro de la esfera estalla una bala, formando muchos fragmentos. La explosión es esféricamente simétrica. Los fragmentos que caen sobre la superficie interna de la esfera, se adhieren. Determínese la velocidad de la esfera después de la explosión si su masa es igual a la masa de la bala y las velocidades de los fragmentos son v.

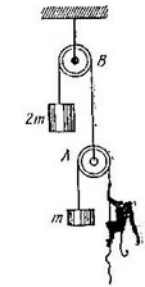
2.2.12. Para crear una fuerza de gravedad artificial en el tramo pasivo de vuelo, dos partes de la nave cósmica (con relación de las masas 1 : 2) fueron separadas a la distancia R la una de la otra y las hicieron girar alrededor del centro de masas. Determínese el período de rotación, si la fuerza de gravedad artificial que actúa

sobre todos los cuerpos en la parte más maciza de la nave es dos veces menor que la fuerza de gravedad en la Tierra.

2.2.13*. Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 están unidos por un hilo de longitud l y se mueven por una superficie horizontal lisa que coincide con el plano de la figura. En cierto momento de tiempo resultó que el cuerpo m_1 quedó inmóvil, mientras que la velocidad del cuerpo m_2, igual a v, era perpendicular al hilo. Determínese la tensión del hilo en el mencionado momento de tiempo.

2.2.14. Un astronauta de masa m va acercándose a la nave cósmica de masa M con ayuda de un cable, cuya longitud es l. ¿Qué caminos pasarán el astronauta y la nave hasta acercarse?

2.2.15. En el extremo de una barra de masa M, dispuesta en un plano horizontal liso, permanece una carretilla con arena. A la carretilla se le comunica la velocidad horizontal v y de ella empieza a desprenderse arena con un gasto másico μ. La arena se adhiere a la barra. La carretilla se mueve sin fricción. La masa de la arena es m. Hállese la dependencia entre la velocidad de la barra y el tiempo.



Para el problema 2.2.16.

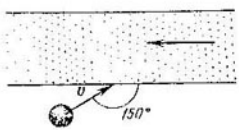
2.2.16. Una mona de masa m está equilibrada con un contrapeso en la polea A. La polea A queda equilibrada con una carga en la polea B. El sistema permanece inmóvil. ¿Cómo se moverá la carga de $2m$ si la mona comienza a acortar uniformemente la cuerda tirando de ella a la velocidad u con relación a sí misma? Menospréciense las masas de las poleas y la fricción.

2.2.17. En un cable de longitud L está suspendido un cajón pequeño, lleno de arena, en el que entran balas con trayectoria horizontal a la velocidad v. La masa de una bala m es mucho menor que la del cajón M. El cable se desvía en un ángulo α con relación a la dirección vertical. ¿Qué cantidad de balas se detiene en la arena por segundo?

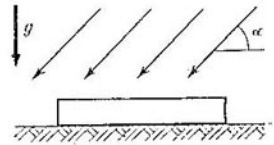
2.2.18. Un cohete, moviéndose en el espacio cósmico a la velocidad u, va a parar a una nube de polvo de densidad ρ. La sección del cohete es S. La colisión de las partículas de polvo contra el cohete se considera inelástica. Menospréciese la variación de la masa del cohete. ¿Qué empuje deben desarrollar los motores del cohete para que se mueva a velocidad constante?

2.2.19. Dos bolas enterizas, hechas de un mismo material, caen sobre la tierra, decelerándose en una nube enrarecida de polvo. ¿En cuánto la velocidad estacionaria de una bola supera la velocidad de la otra si el radio de la primera es el doble del de la segunda? Téngase en cuenta solamente la resistencia que ejercen las partículas de polvo, menospreciando la ejercida por el aire. Las colisiones de las partículas de polvo contra la bola considérense inelásticas.

2.2.20. Una bala vuela a la velocidad v y va a parar a un flujo de granos de arena que se mueven a iguales velocidades formando un ángulo de 150° respecto a la velocidad de la bala y se adhieren a ella. Después de atravesar el flujo, la bala sigue volando con una velocidad 4 veces menor y bajo un ángulo de 90° con relación a la velocidad del flujo. ¿Qué velocidad corresponde a los granos de arena? ¿Cuántos granos de arena se adhieren a la bala si la masa de un grano de arena es 1000 veces inferior a la masa de la bala?



Para el problema 2.2.20.



Para el problema 2.2.22*.

2.2.21*. Un flujo de partículas con trayectoria horizontal actúa sobre cierta barra de masa M, yacente en el plano horizontal. La masa total, que contiene la unidad de volumen del flujo, es ρ, la sección de éste, S y la velocidad de las partículas en el mismo, v. ¿Cuál será la velocidad estacionaria de la barra si la colisión de las partículas contra la barra es elástica? El coeficiente de fricción de la barra con el plano es μ.

2.2.22*. Un flujo de partículas, que vuelan bajo un ángulo α con respecto al horizonte, actúa sobre una barra baja de masa M, yacente en el plano horizontal. La masa total, que contiene la unidad de volumen del flujo, es ρ y la velocidad de las partículas en el mismo, v. El coeficiente de fricción de la barra con el plano es μ. ¿Cuál será la velocidad estacionaria de la barra si las partículas se adhieren a su superficie? El área de la superficie horizontal de la barra es S. Menospréciense las masas de las partículas que se precipitan sobre la superficie de la barra.

2.2.23. Una lancha impulsada por chorro de agua se mueve en agua tranquila. La fuerza de resistencia del agua al movimiento de la lancha $F = kv$. La velocidad del agua expulsada con respecto a la lancha es u. Determínese la velocidad estacionaria de la lancha, si la sección del flujo de agua aspirada por el motor es S. La densidad del agua es ρ.

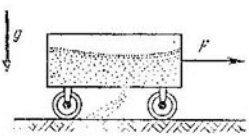
2.2.24. Un tubo de radio r contiene cierta substancia porosa de densidad ρ_0. Un émbolo imponderable, sobre el cual actúa una fuerza constante F, al moverse por el tubo, comprime la substancia hasta la densidad ρ. ¿Con qué velocidad se mueve el émbolo si la compresión transcurre a salto, es decir, considerando que en el tubo se desplaza a cierta velocidad una superficie, a la derecha de la

cual la densidad de la substancia es ρ y a la izquierda, ρ_0? En el instante inicial esta superficie coincide con la superficie del émbolo.

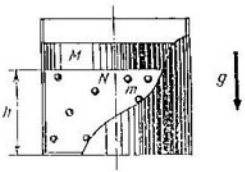
2.2.25. Un cohete de masa M está suspendido sobre la superficie de la Tierra. ¿Qué masa de combustible en unidad de tiempo debe gastar el cohete en este caso, si la velocidad de salida del gas es u? Cómo cambiará el resultado, si el cohete comienza a moverse hacia arriba con la aceleración a?

2.2.26. Dos carretillas idénticas, en las que se encuentran dos barrenderos del mismo peso, se mueven con las mismas velocidades. En cierto instante empieza a nevar uniformemente. El barrendero que se encuentra en una de las carretillas tira todo el tiempo la nieve a un lado, mientras que en la segunda carretilla el barrendero duerme. ¿Cuál de las carretillas pasará con mayor rapidez una distancia determinada?

2.2.27. Hállense la aceleración y la velocidad de la carretilla en función del tiempo cuando ésta se mueve bajo la acción de una fuerza constante F si por un orificio en su plataforma en unidad de tiempo sale la masa de arena Δm. En el instante $t = 0$ la velocidad



Para el problema 2.2.27.



Para el problema 2.2.29.

de la carretilla era nula y la masa de la arena y la carretilla en conjunto era igual a M.

2.2.28. En el platillo de una balanza saltan n bolas de masa m. ¿Cuál será la fuerza media que actúa sobre el platillo de la balanza, si cuando las bolas chocan contra el platillo el módulo de su velocidad no varía y en caso de que al chocar el módulo de su velocidad disminuye?

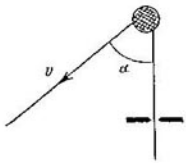
2.2.29. En un cilindro bajo el émbolo de masa M saltan, chocando elásticamente contra el émbolo y el fondo del cilindro, $N \gg 1$ bolas de masa m cada una. La fuerza de gravedad del émbolo queda equilibrada por las colisiones de las bolas. La distancia entre el émbolo y el fondo del cilindro es h. ¿A qué altura H saltarán las bolas si se retira rápidamente el émbolo?

2.2.30. En un platillo de la balanza se encuentra un reloj de arena. Cuando la arena está abajo, la indicación de la balanza es P_0. Al reloj se le da vuelta. ¿Cómo dependerán las indicaciones de la balanza respecto del tiempo? El tiempo de caída de cada grano de arena es τ.

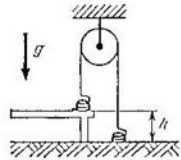
2.2.31. ¿Con qué fuerza presiona sobre la tierra una cobra cuando, preparándose a saltar, se levanta verticalmente con la velocidad constante v? La masa de la serpiente es m y su longitud, l.

2.2.32. Una cuerda pesada está suspendida de un hilo de manera que su cabo inferior roza la superficie de la mesa. El hilo se quema. Determínese la presión que ejerce la cuerda sobre la mesa durante su caída en función de la longitud del cabo que aún sigue cayendo.

2.2.33. La cuerda, que rodea un clavo liso, es arrastrada a través de cierta rendija a la velocidad v. La fuerza de fricción en la rendija es F, la masa de la unidad de longitud de la cuerda es ρ y $v > \sqrt{F/\rho}$. Determínese la fuerza que actúa sobre el clavo si los cabos de la cuerda forman un ángulo α.



Para el problema 2.2.33.



Para el problema 2.2.34.

2.2.34. Una cuerda rodea una polea, con la particularidad de que una parte de la cuerda yace en la mesa y la otra, en el suelo. Después de dejar libre la cuerda, ésta empezó a moverse. Hállese la velocidad del movimiento uniforme estacionario de la cuerda. La altura de la masa es h.

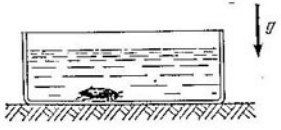
2.2.35. Determínese el empuje del motor reactor de un avión que vuela a velocidad v. Los gastos másicos del combustible y del aire que ingresa al motor son μ_1 y μ_2, respectivamente. La velocidad de los productos de combustión en la salida del motor con respecto al avión es u.

2.2.36*. a) El gas que sale por la tobera tiene la velocidad v con relación al cohete. Determínese la velocidad del cohete después de que su masa total disminuyó n veces a causa del derrame del gas.

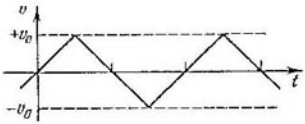
b) La velocidad del gas que se derrama del cohete es de 2 km/s con relación a este último. Estímese la masa del cohete que podrá poner en órbita un satélite de masa de 10^4 kg.

2.2.37. En un suelo liso se encuentra cierto recipiente lleno de agua de densidad ρ_0 y volumen V_0. En él se halla un escarabajo de volumen V y densidad ρ. El bicho comienza a moverse a la velocidad u con respecto al recipiente. ¿Con qué velocidad empieza a moverse el recipiente con relación al suelo? Menospréciese la masa del recipiente.

2.2.38*. Determínese la velocidad estacionaria de un cuerpo que se desplaza por cierta tabla inclinada, cuya velocidad en sentido longitudinal cambia con gran frecuencia como se muestra en la



Para el problema 2.2.37.



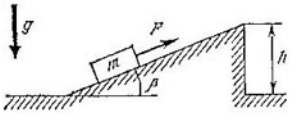
Para el problema 2.2.38*.

figura. La amplitud de la velocidad es v_0, el coeficiente de fricción μ, la tabla está inclinada bajo un ángulo α al horizonte.

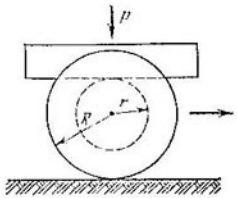
§ 2.3. Trabajo. Energía

2.3.1. Un cuerpo de masa m asciende por un plano inclinado bajo el efecto de la fuerza F. La altura del plano es h y el ángulo de la base, β. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y el plano inclinado es μ. Determínense el trabajo de la fuerza de fricción y el trabajo de la fuerza de gravedad.

2.3.2. ¿Qué trabajo es necesario realizar para arrastrar una barra de longitud l y masa m por una franja rugosa de anchura L? El coeficiente de fricción es μ.



Para el problema 2.3.1.



Para el problema 2.3.3*.

2.3.3*. Una prensa ejerce presión con la fuerza P sobre un cilindro de radio r con ruedas de radio R fijadas rígidamente a él. El coeficiente de fricción entre el cilindro y la prensa, así como entre las ruedas y el plano horizontal es igual a μ. ¿Qué trabajo mínimo es necesario efectuar para desplazar el eje del sistema hacia la derecha a la distancia l (esta última es menor que la distancia hasta el extremo de la prensa)?

2.3.4. ¿Qué potencia desarrolla un caballo al impulsar un trineo, si el animal lo arrastra a la montaña uniformemente con una veloci-

dad u? La masa del trineo es m y el coeficiente de fricción es μ. El ángulo de inclinación de la montaña es α.

2.3.5. Dos automóviles con potencias N_1 y N_2 desarrollan las velocidades v_1 y v_2. ¿Qué velocidad desarrollarán si los enganchamos? No hay deslizamiento [1]).

2.3.6*. Un automóvil de masa m se pone en marcha. El coeficiente de fricción entre las ruedas y la carretera es μ. Los dos ejes del automóvil son ejes impulsores. Hállese la dependencia de la velocidad respecto al tiempo, si la potencia del motor es N.

2.3.7. Una lancha impulsada por chorro de agua se mueve por agua tranquila a velocidad constante v. La velocidad del agua expulsada con relación a la lancha es u. Determínese la resistencia que ejerce el agua si la sección del flujo del agua que toma el motor es S y la densidad del agua es ρ.

2.3.8. ¿Qué potencia desarrollan los motores de un cohete que queda suspendido de modo inmóvil sobre la Tierra? La masa del cohete es M y la velocidad de salida de los gases es u.

2.3.9. Un cuerpo de masa de 1 kg se lanza bajo un ángulo de 45° hacia el horizonte con una velocidad inicial de 19,6 m/s. Trácese la gráfica de la dependencia de las energías total, cinética y potencial con respecto al tiempo.

2.3.10. En dos cohetes idénticos, uno de los cuales se mueve y el otro está en reposo, se conectan por breve tiempo los motores. Durante su funcionamiento ellos arrojan una misma masa de gas (pequeña en comparación con la masa del cohete) a igual velocidad respecto a los cohetes. La energía cinética del cohete en movimiento que primero era E_0, aumentó en un 4 por 100. Determínese la energía cinética del segundo cohete.

2.3.11. Se propone llenar de carbón los vagones de un tren en marcha. Calcúlese el trabajo que realiza el tren durante la carga de cierta masa m y compárese con la energía cinética que obtuvo la masa de carbón cargada si la velocidad del tren es u. Explíquese el resultado.

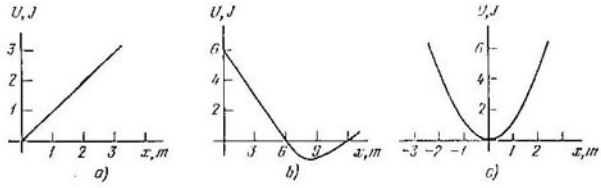
2.3.12. Una bola de masa m, sujeta en una barra imponderable, gira a la velocidad constante v. Su energía cinética en el sistema de referencia, inmóvil respecto al eje de rotación, es constante e igual a $mv^2/2$. En el sistema de referencia que se mueve en el plano de rotación linealmente a la velocidad v con relación al eje, la energía cinética de la bola cambia desde 0 hasta 4 $(mv^2/2)$. ¿Qué causa provoca este cambio de energía?

2.3.13. En el campo de gravedad una fuerza F, dirigida verticalmente hacia arriba, ejerce sobre cierto cuerpo de masa m. Trácese la gráfica de dependencia entre la energía potencial y el tiempo. La fuerza F actúa un tiempo limitado τ.

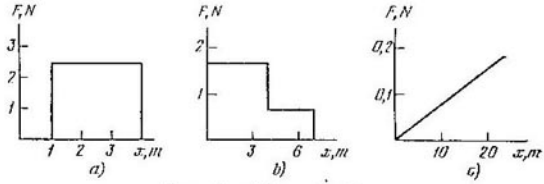
---

[1]) Si no se dan otras indicaciones en el problema, menospréciese la resistencia del aire.

2.3.14. En la figura se muestran las gráficas de energías potenciales de una masa puntiforme en diferentes campos. Trácense las gráficas de las fuerzas que actúan sobre esta masa.



Para el problema 2.3.14.



Para el problema 2.3.15.

2.3.15. En la figura vienen expuestas las gráficas de dependencias de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos, con respecto a la distancia. Trácense las gráficas de las energías potenciales de dichos cuerpos.

2.3.16. Las dependencias de las energías potenciales de los cuerpos con relación a las distancias tienen el aspecto: a) $U = U_0\, x/x_0$; b) $U = U_0\, (x/x_0)^2$; c) $U = U_0\, x_0/x$. Determínese cómo dependen de la distancia las fuerzas que actúan sobre los cuerpos. La magnitud x_0 posee dimensión de longitud y la U_0, dimensión de energía.

2.3.17. Las dependencias entre las fuerzas, que actúan sobre los cuerpos, y la distancia tienen el aspecto: a) $F = F_0$; b) $F = F_0\, x/x_0$; c) $F = F_0\, (x_0/x)^2$. Determínese qué dependencia existe entre la distancia y las energías potenciales de los cuerpos. La magnitud F_0 posee dimensión de fuerza y la x_0, dimensión de longitud.

2.3.18. La profundidad a que penetran las partículas de masa m en la zona de acción de una fuerza de frenado es directamente proporcional al impulso: $l = \alpha p$. Hállese la ley de la dependencia entre la fuerza y profundidad.

2.3.19. Estímese el esfuerzo medio que desarrollan los pies de una persona al tocar tierra después de saltar desde la ventana del segundo piso.

2.3.20. Levantaron leña al noveno piso y la quemaron. ¿Qué transcurrió con la energía potencial de la leña?

2.3.21. Una cortina de ventana con masa de 1 kg y longitud de 2 m se enrolla en forma de un rodillo sobre la ventana. ¿Qué trabajo se realiza en este caso? Menospréciese la fricción.

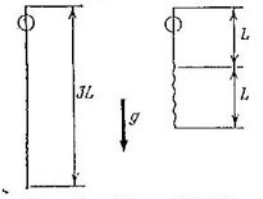
2.3.22. ¿Qué trabajo es necesario efectuar para poner verticalmente una barra fina de longitud L y masa M que yace en la mesa.

2.3.23*. En un pozo de diámetro D se encuentra un pilote de diámetro d y longitud $2l$. La densidad del material del pilote es ρ. En el pozo se vierte agua de densidad ρ_0 hasta la mitad del pilote. Determínese el trabajo que es necesario realizar para sacar el pilote del agua.

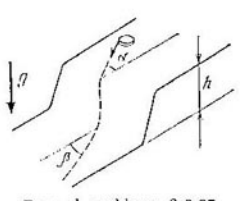
2.3.24. A dos cuerpos idénticos se les comunican las mismas velocidades bajo cierto ángulo hacia el horizonte. Un cuerpo está libre y el otro se mueve a lo largo de un rayo. ¿Cuál de los cuerpos alcanzará mayor altura?

2.3.25*. Un cohete meteorológico de masa M, lanzado verticalmente mediante un impulsor auxiliar de despegue con la velocidad inicial v, posee un motor capaz de desarrollar un empuje F durante el tiempo τ. ¿En qué instante conviene que comience a funcionar el motor para que el cohete alcance la altura máxima? ¿Cuál es esa altura? Considérese que la masa del cohete no varía y que la aceleración de la caída libre g es constante.

2.3.26*. El tramo inferior de longitud $2L$ de un alambre de longitud $3L$ se ha hecho ondulado, de manera que la longitud de dicha parte se convirtió en L. Determínese el tiempo de deslizamiento de un abalorio por este alambre que inicialmente se encontraba en reposo arriba en el alambre. La fricción debe despreciarse. El alambre está suspendido verticalmente. Las dimensiones de la onda son mucho menores que L.



Para el problema 2.3.26*.



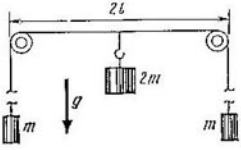
Para el problema 2.3.27.

2.3.27. Dos planos horizontales que distan h se unen suavemente. Por el plano superior se mueve a la velocidad v cierto cuerpo bajo un ángulo α hacia la normal de la línea de conjugación. Hállese el ángulo β entre la dirección del movimiento del cuerpo y la normal a la línea de conjugación en el plano inferior. No existe fricción.

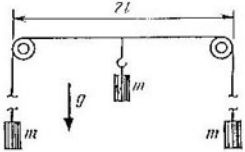
2.3.28. Una partícula de masa m se mueve bajo un ángulo α al plano que divide los espacios con energías potenciales U_1 y U_2. La velocidad de la partícula es v_1. Hállese bajo qué ángulo ella se moverá después de pasar ese plano. ¿A qué condición la partícula no penetrará en la zona con energía potencial U_2?

2.3.29. Una barra imponderable de longitud l con masas iguales en los extremos se pone verticalmente en el plano horizontal. La barra se deja libre. Determínese la velocidad de la masa superior en el instante del choque contra el plano si: a) la masa inferior está fijada en charnela; b) la masa inferior puede deslizarse por el plano sin fricción.

2.3.30*. En los extremos de un hilo muy largo están suspendidas cargas iguales de masas m. El hilo descansa en dos poleas pequeñas



Para el problema 2.3.30*.

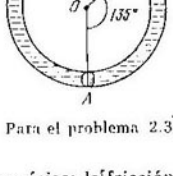


Para el problema 2.3.31.

imponderables que distan $2l$. Búsquese la velocidad de las cargas al cabo de un lapso suficientemente largo, si en el centro del hilo se sujeta una carga de masa $2m$.

2.3.31. El sistema, mostrado en la figura, se pone en movimiento mediante una carga central de masa m. Determínese la velocidad máxima de la carga central y su alejamiento máximo de la posición inicial.

2.3.32*. Un tubo, cuyo diámetro es mucho menor que la longitud, se enrolla en un anillo de radio R y se llena de agua, a excepción de una parte pequeña alrededor del punto A que se llena de aceite. En el momento inicial el «tapón» de aceite comienza a emerger en dirección del punto B. Hállese su velocidad en el instante en que pasa por el punto B. El ángulo AOB es igual a 135°. La densidad del aceite es ρ_a, la densidad del agua ρ_{ag} y $\rho_{ag} > \rho_a$. La longitud del «tapón» de aceite $l \ll R$. Menospréciese la fricción con las paredes del tubo. No existe infiltración a través del «tapón».

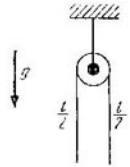


Para el problema 2.3.32*.

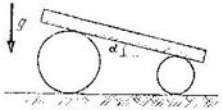
2.3.33. Una cuerda pesada homogénea de longitud L descansa sobre una polea imponderable de manera que uno de los cabos colgantes es igual a l. La cuerda se deja libre. Determínese la velocidad

de la cuerda en el instante de deslizarse de la polea. Menospréciense las dimensiones de la polea.

2.3.34. Una cuerda homogénea de longitud l y masa m yace sobre la polea de manera que inicialmente se encuentra en equilibrio. No existe fricción. La cuerda empieza a deslizarse. ¿Con qué fuerza actúa la cuerda sobre la polea en el instante en que la longitud de la cuerda en una parte de la polea es igual a $l/3$?



Para el problema 2.3.34.

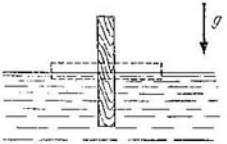


Para el problema 2.3.35*.

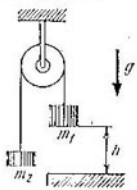
2.3.35*. Sobre dos rodillos de diferentes radios yace una tabla pesada que forma el ángulo α con el horizonte. Hállese la aceleración de la tabla. Menospréciese la masa de los rodillos. No hay deslizamiento.

2.3.36. Al elevar lentamente un cuerpo de masa m por un plano oblicuo con ángulo de inclinación α y el coeficiente de fricción μ, se ha realizado cierto trabajo A. Determínese cuánto calor se desprendió.

2.3.37. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá al dar media vuelta a una barra de sección cuadrada sumergida en agua pasándola de la posición vertical a la horizontal? La masa de la barra es de 10^{-2} kg, la longitud, de 0,2 m y la sección es de $0{,}01 \times 0{,}01$ m^2.



Para el problema 2.3.37.

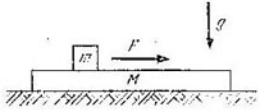


Para el problema 2.3.38.

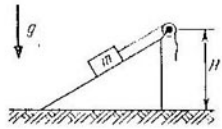
2.3.38. Dos cargas de masas m_1 y m_2 ($m_1 > m_2$) se unen mediante un hilo que descansa sobre la polea inmóvil. En el instante inicial las cargas están en reposo y la distancia entre la carga m_1 y la mesa que se encuentra debajo de ella, es igual a h. ¿Cuánto calor se desprenderá al chocar la carga con la mesa? El choque es absolutamente inelástico.

2.3.39. Una fuerza F, dirigida horizontalmente, actúa sobre un cuerpo de masa M durante el tiempo τ. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y el plano horizontal en el que yace el cuerpo es igual a μ. ¿Qué camino recorrerá el cuerpo hasta pararse?

2.3.40. En una superficie horizontal lisa yace una barra larga de masa M. Una fuerza horizontal F actúa sobre un cubo de masa m que descansa en la barra durante el tiempo τ. El coeficiente de fricción entre la barra y el cubo es μ. ¿Qué camino recorrerá el cubo por la superficie de la barra?



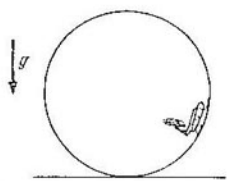
Para el problema 2.3.40.



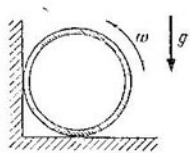
Para el problema 2.3.41.

2.3.41. Un cuerpo de masa m se eleva lentamente por un plano oblicuo mediante un cable, sujeto al cuerpo y yacente en una polea, instalada en el vértice. Al elevar la carga al vértice, se realiza un trabajo A. En el punto superior el cable se rompe y la carga se desliza hacia abajo. ¿Qué velocidad tendrá la carga en el instante en que se desprenda del plano? La altura del plano oblicuo es H.

2.3.42. ¿Qué trabajo realizará la fuerza de fricción durante una revolución del trineo aéreo efectuando el rizo (loop)? El movimiento transcurre a velocidad constante v, la masa del trineo es m y el coeficiente de fricción es μ.



Para el problema 2.3.42.

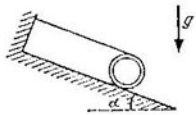


Para el problema 2.3.43.

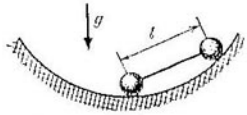
2.3.43. Un cilindro de paredes finas y radio R se hace girar hasta una velocidad angular ω y se pone en un rincón, como se muestra en la figura. El coeficiente de rozamiento de deslizamiento entre las paredes del ángulo y el cilindro es μ. ¿Cuántas revoluciones realizará el cilindro hasta pararse?

2.3.44*. En un cilindro de paredes delgadas se enrolla un hilo, cuyo cabo se fija en el soporte en el punto superior del plano oblicuo

de manera que, al deslizarse el cilindro, el hilo permanece paralelo todo el tiempo al plano oblicuo. Determínese la velocidad del cilindro en el punto inferior del plano, si su longitud es l, el ángulo de inclinación hacia el horizonte es α y el coeficiente de rozamiento μ.



Para el problema 2.3.44*.

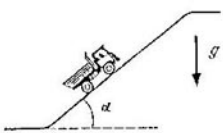


Para el problema 2.3.45.

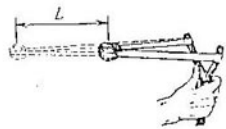
2.3.45. En un platillo esférico de radio R se pone un halterio en forma de barra imponderable de longitud l con bolas de masas m en los extremos. Una de las bolas yace en el punto inferior de la semiesfera. Existe una fricción pequeña. El halterio empieza a moverse. Determínese qué cantidad de calor se desprenderá al cabo de un tiempo largo.

2.3.46. Un automóvil con motor en funcionamiento y con la velocidad inicial v sube a una montaña cubierta de hielo, cuya superficie está inclinada bajo un ángulo α hacia el horizonte. ¿De qué altura es la montaña que puede superar el automóvil, si el coeficiente de fricción entre las ruedas y la montaña $\mu < \operatorname{tg} \alpha$?

2.3.47. Cierta persona, encontrándose en una escalera automática que se mueve hacia abajo, decide subir por esa escalera en dirección contraria. ¿Qué trabajo debe efectuar para subir a la altura H durante el tiempo τ? La masa de la persona es m, la velocidad de la escalera automática, v y el ángulo de inclinación, α.



Para el problema 2.3.46.

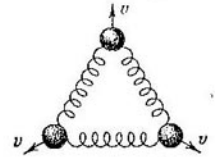


Para el problema 2.3.48.

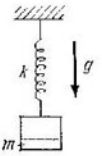
2.3.48. El tiragomas está hecho de caucho con rigidez k. Hállese la velocidad del «proyectil» de masa m, lanzado de dicho tiragomas si éste se estiró a una longitud L.

2.3.49. Tres masas idénticas m se unen mediante muelles iguales de rigidez k. A todas las masas se les comunica simultáneamente la misma velocidad v en dirección contraria a la del centro del sistema. ¿Qué distancia recorrerá cada una de las masas antes de pararse?

2.3.50. Una masa m se desprende de la carga, colgada en un resorte de rigidez k. ¿A qué altura máxima se elevará después de ello la parte restante de la carga?

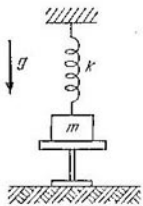


Para el problema 2.3.49.

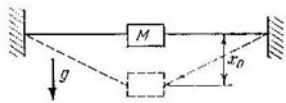


Para el problema 2.3.50.

2.3.51. Cierta carga de masa m, sujeta al resorte de rigidez k, se encuentra sobre un soporte, por lo que el muelle resulta no tensado. El soporte se retira con rapidez. Determínense la longitud del alargamiento máximo del resorte y la velocidad máxima de la carga.



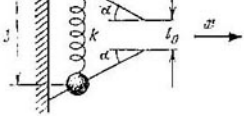
Para el problema 2.3.51.



Para el problema 2.3.52.

2.3.52. Al centro de la cuerda de goma sin estirar de longitud $2l$, cuyos extremos se sujetan a la pared, se cuelga cierta carga de masa M. ¿Cuál será la rigidez de dicha cuerda, si al soltar la carga, ésta baja a la distancia máxima x_0?

2.3.53. En los extremos de un muelle imponderable de rigidez k y longitud l se hallan dos pequeños abalorios de masa m cada uno.



Para el problema 2.3.53.

Para el problema 2.3.54.

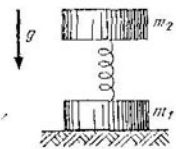
Los abalorios están puestos en barras sujetas rígidamente de la manera expuesta en la figura. La distancia entre los extremos de las

barras l_0 coincide con la longitud del muelle sin estirar. Determínese con qué velocidad se moverá el muelle en la dirección x, después de que los abalorios se desprendan de las barras. En el instante inicial el muelle se encontraba en reposo. Menospréciense la fricción y el campo de gravedad.

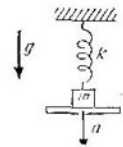
2.3.54. Determínese la presión máxima sobre el suelo, si el cuerpo de masa M cae de la altura H sobre un muelle de rigidez k y longitud l. Explíquese por qué al aumentar la rigidez del muelle la presión aumenta.

2.3.55. ¿Con qué fuerza es necesario presionar sobre la carga superior m_2 para que al cesar de ejercer dicha fuerza, la carga m_1 se separe del suelo?

2.3.56*. Sobre una pelota de tenis cae de una altura de 1 m un ladrillo y rebota casi a 1 m. Estímese a qué altura saltará la pelota.



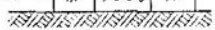
Para el problema 2.3.55.



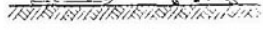
Para el problema 2.3.57*.

2.3.57*. Cierto cuerpo suspendido en un muelle, descansa sobre una tabla. En el instante inicial el muelle no está estirado. La tabla empieza a bajar con aceleración a. ¿Cuál será el alargamiento del muelle en el instante en que la tabla se despegue del cuerpo? ¿Cuál será la longitud del alargamiento máximo del muelle? La masa del cuerpo es m y la rigidez del muelle, k.

2.3.58*. En un plano horizontal descansan dos barras de masas m y M, unidas por un muelle sin estirar. El coeficiente de fricción entre las cargas y el plano es μ. Determínese qué fuerza horizontal



Para el problema 2.3.58*.



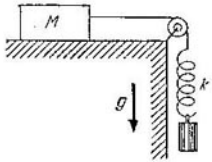
Para el problema 2.3.59*.

constante mínima debe aplicarse a la barra izquierda para que comience a moverse la derecha.

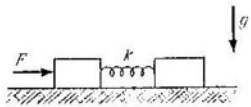
2.3.59*. Un perro de masa m está amarrado por una traílla de longitud L a un trineo de masa M ($M > m$). En el instante inicial

el perro se encuentra al lado del trineo. Los coeficientes de fricción del perro y el trineo con el plano son μ. ¿A qué distancia máxima podrá el perro desplazar el trineo de un tirón?

2.3.60*. En una mesa horizontal descansa cierta carga de masa M. El coeficiente de fricción entre la carga y la mesa es μ. A la carga se le amarra un hilo inextensible que abarca una polea. En el hilo se sujeta un muelle imponderable. ¿Qué masa deberá poseer la carga que es necesario colgar en el muelle sin estirar para que al soltarla pueda desplazar la carga de masa M del sitio en que se encuentra?



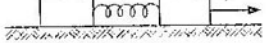
Para el problema 2.3.60*.



Para el problema 2.3.61.

2.3.61. En una mesa horizontal lisa descansan dos barras iguales, unidas por un muelle de rigidez k y longitud l_0. De pronto sobre la barra izquierda empieza a actuar la fuerza horizontal constante F. Hállense las distancias máxima y mínima entre las barras.

2.3.62*. En una mesa horizontal lisa se encuentran en reposo dos cuerpos iguales, unidos por un muelle de rigidez k. La fuerza horizontal F empieza a actuar sobre el cuerpo derecho. El movimiento vibratorio que surge se amortigua paulatinamente a causa de la fricción en el muelle, y al cabo de cierto tiempo los cuerpos comienzan a moverse con aceleración uniforme. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá hasta ese tiempo?



Para el problema 2.3.62*.

Para el problema 2.3.63*.

2.3.63*. De un plano oblicuo con el ángulo de inclinación α se deslizan dos cuerpos iguales de masas m, unidos por un muelle de rigidez k que al principio estaba deformado. Determínese la longitud del alargamiento máximo del muelle al moverse el sistema, si el coeficiente de fricción entre el cuerpo *2* y el plano es μ. No existe fricción entre el cuerpo *1* y el plano.

§ 2.4. Principios de conservación de la energía y el impulso (cantidad de movimiento)

2.4.1. Contra una bola inmóvil choca a la velocidad u otra bola cuya masa es k veces mayor que la masa de la primera. ¿Cuál serán las relaciones de las velocidades de las bolas con respecto a la velocidad u después de una colisión elástica central? ¿A qué magnitud tienden estas relaciones si k tiende a la infinidad?

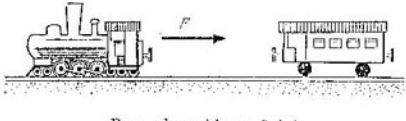
2.4.2*. Una bola descansa en un plano horizontal absolutamente liso. Contra ella choca otra bola idéntica. La colisión es absolutamente elástica y no central. Hállese el ángulo de dispersión de las bolas.

2.4.3. Dos partículas iguales con velocidades v_1 y v_2, respectivamente, están en interacción elástica. El ángulo entre las velocidades es α. Después de la interacción las velocidades de las partículas son u_1 y u_2. Hállese el ángulo de dispersión.

2.4.4. ¿Por qué los neutrones rápidos pasan fácilmente a través de un bloque de plomo, pero se retienen por un mismo volumen de parafina, agua u otro compuesto, en la composición de los cuales figuran átomos de hidrógeno?

2.4.5. Al irradiar un cristal mediante el flujo de neutrones se descubrió que de la superficie, contraria a la bombardeada, salen átomos, con la particularidad de que la dirección del desprendimiento de los átomos depende sólo de la orientación del cristal y no es función de la dirección del flujo de neutrones. Explíquese este fenómeno.

2.4.6. Una locomotora con tracción constante F empezó a moverse hacia el vagón inmóvil y chocó con él al cabo de un tiempo τ.



Para el problema 2.4.6.

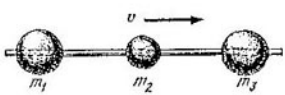
¿Dentro de cuánto tiempo ocurrirá la siguiente colisión? La colisión es elástica. Menospréciese la fricción en los ejes de las ruedas del vagón. Las masas del vagón y la locomotora son iguales. Hállese el tiempo entre las colisiones subsiguientes.

2.4.7*. Una partícula pesada de masa M choca con una partícula ligera en reposo con masa m. ¿A qué ángulo máximo puede desviarse la partícula pesada durante la colisión?

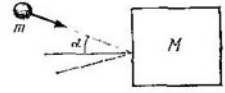
2.4.8. Tres abalorios con masas m_1, m_2 y m_3 pueden deslizarse a lo largo de una aguja horizontal sin fricción, con la particularidad de que $m_1 \gg m_2$ y $m_3 \gg m_2$. Determínense las velocidades máximas de los abalorios dispuestos en los extremos, si en el instante inicial

estaban en reposo, mientras que el central tenía una velocidad v. Considérense que las colisiones son elásticas.

2.4.9. Una partícula de masa m choca contra cierta barra de masa M bajo el ángulo α respecto a la normal del plano de la



Para el problema 2.4.8.



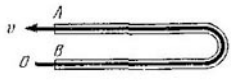
Para el problema 2.4.9.

barra. La barra se encuentra en reposo. Determínese bajo qué ángulo rebota la partícula. La colisión es elástica.

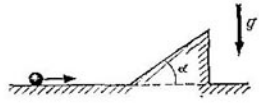
2.4.10. Por la superficie lisa de una mesa pueden moverse un anillo de radio R y una bola que se encuentra dentro del anillo. En el instante inicial la bola choca elásticamente contra el anillo. Antes del choque el anillo estaba inmóvil, mientras que la bola poseía la velocidad v, dirigida bajo el ángulo α al radio, trazado al punto de la colisión. Hállese el tiempo hasta la siguiente colisión.

2.4.11*. Dentro de un tubo en U con masa M se encuentra un hilo de masa m. En el instante inicial el hilo y el tubo se mueven de manera que la velocidad del cabo del hilo A es igual a v y la velocidad del cabo B es nula. ¿Con qué velocidad se moverá el tubo cuando el hilo salga de él? Despréciese la fricción y el radio de la curvatura del tubo considérese muy pequeño. El tubo no gira.

2.4.12*. Una bola, moviéndose por un plano liso, choca contra un saliente cuneiforme. Tiene lugar una colisión elástica. Hállese la velocidad mínima posible de la bola con la cual pueda vencer la cuña. El ángulo de la cuña es α y la altura, H.



Para el problema 2.4.11*.

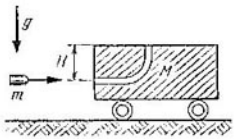


Para el problema 2.4.12*.

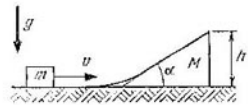
2.4.13. Un proyectil de masa m va a parar al canal practicado en el vagón de masa M. Determínese a qué velocidad inicial mínima el proyectil ascenderá a la altura h sobre el tejado. No existe fricción. La sección inferior del canal dista H del tejado.

2.4.14*. Una cuña de masa M y altura h descansa en un plano horizontal. La superficie de la cuña, inclinada bajo el ángulo α al horizonte, en su parte inferior se acopla suavemente con el plano. Cierto cuerpo de masa m llega hacia la cuña con la velocidad v. ¿A qué altura ascenderá el cuerpo después de desprenderse de la cuña? Menospréciese la fricción.

2.4.15*. Un soporte semiesférico de masa M y radio R yace sobre una mesa lisa. Cierto cuerpo de masa m se pone en el extremo del soporte y se deja libre. Fricción no hay. Búsquense las velocidades



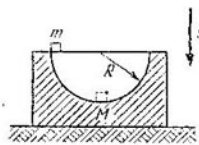
Para el problema 2.4.13.



Para el problema 2.4.14*.

de los cuerpos cuando el cuerpo de masa m pasa el punto inferior de la semiesfera. ¿Con qué fuerza el cuerpo presionará sobre el soporte en el punto inferior?

2.4.16. Los impulsos de dos cuerpos que chocan son p_1 y p_2, respectivamente. El ángulo entre las velocidades de los cuerpos es 0. Al chocar, los cuerpos se aglutinan. La masa del cuerpo aglutinado es M. Determínese la velocidad de este cuerpo.



Para el problema 2.4.15*.

2.4.17. Dos bolas vuelan una al encuentro de la otra. Entre las bolas tiene lugar una colisión inelástica. Se sabe que la energía cinética de una bola supera 20 veces la energía cinética de la otra. ¿Para qué relación de masas las bolas, después de chocar, se moverán en dirección del movimiento de la bola con menor energía?

2.4.18. Una bala de acero con masa m y velocidad v perfora una esfera de plomo con masa M, como consecuencia de lo cual la velocidad de la bala disminuye a la mitad. ¿Qué parte de la energía cinética de la bala se transformó en calor?

2.4.19. Una bala de masa m, que volaba a la velocidad inicial v, perfora un disco de masa m y se atranca en el siguiente, idéntico al primero. Hállese la cantidad de calor que se desprendió en el primer disco, si en el segundo se desprendió la cantidad de calor Q_2.

2.4.20. Un neutrón con energía de 250 keV choca contra el núcleo ^{6}Li. Se forma un núcleo excitado ^{7}Li. Hállese la energía cinética del núcleo ^{7}Li.

2.4.21. Un átomo de masa M puede aumentar su energía interna en E. Determínese qué velocidad mínima debe poseer un electrón de masa m_e para poder excitar el átomo a causa de un choque. La colisión es central.

2.4.22. Un núcleo atómico inmóvil se desintegra en dos fragmentos con masas m_1 y m_2. En este caso se desprende una energía E

(la energía cinética de los fragmentos). Determínense las velocidades de los fragmentos.

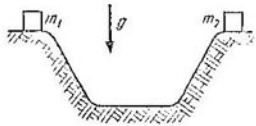
2.4.23*. Una partícula en reposo puede desintegrarse en tres fragmentos iguales de masas m que poseen una energía cinética sumaria K. Examínese un haz de semejantes partículas que se mueven a la velocidad v. Determínense las velocidades máximas posibles de los fragmentos.

2.4.24. Como consecuencia de la desintegración de un núcleo en movimiento aparecieron dos fragmentos con masas m_1 y m_2, cuyos impulsos son p_1 y p_2. El ángulo entre las velocidades de los fragmentos es θ. Determínese la energía que se libera al desintegrarse el núcleo.

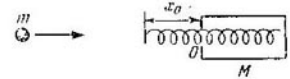
2.4.25. Un núcleo en reposo se desintegra en dos fragmentos iguales de masas m y un fragmento de masa m_1. Los primeros fragmentos con impulsos p se dispersan bajo el ángulo α uno respecto al otro. Determínese la energía que se liberó durante la desintegración.

2.4.26. La reacción de fusión de los isótopos pesado y superpesado de hidrógeno (^{2}H + ^{3}H = ^{4}He + n) se estudia bombardeando con iones de deuterio acelerados hasta la energía de 2 MeV un blanco de tritio. El detector registra los neutrones que salen perpendicularmente a la dirección del haz de deuterones (deutones). Determínese la energía de los neutrones que se registran si en la reacción se libera una energía de 14 MeV.

2.4.27. Dos cuerpos con masas m_1 y m_2 comienzan simultáneamente a deslizarse sin fricción de dos montañas de la misma altura y forma. Al chocar, los cuerpos se aglutinan. Determínese la relación entre la altura a la que asciende el cuerpo que se formó, y la altura desde la que empezaron a deslizarse los cuerpos.



Para el problema 2.4.27.



Para el problema 2.4.28.

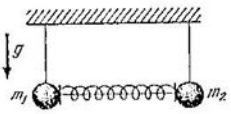
2.4.28. Un dispositivo de masa M tiene un orificio O. Determínese la velocidad mínima que es necesario comunicar a una bola de masa m para que entre en el orificio, si la rigidez del muelle es k y la longitud de la parte saliente del muelle es x_0. El dispositivo no está fijado. Menospréciese la dimensión de la bola.

2.4.29. Dos bolas de masas m_1 y m_2 están colgadas de hilos de la misma longitud. Entre las bolas está oprimido un muelle rígido. La energía del muelle comprimido es U. El hilo que une las bolas, se quema. Hállense las alturas máximas a que se elevarán las bolas.

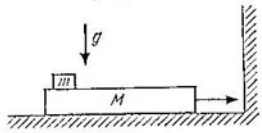
2.4.30. Un cuerpo choca contra una pared inmóvil bajo cierto ángulo α hacia la normal. El coeficiente de fricción con la pared es μ. Determínese bajo qué ángulo rebotará el cuerpo.

2.4.31. Sobre una carretilla de masa M, que se mueve por una recta a la velocidad constante v, cae desde la altura H un ladrillo de masa m. El ladrillo queda en la carretilla. Determínese cuánto calor se desprendió en este caso.

2.4.32. Un anillo de masa m puede deslizarse por una varilla de longitud L y masa M. La fuerza de fricción entre ellos es F. Determínese qué velocidad mínima v es necesario comunicar a la varilla para



Para el problema 2.4.29.

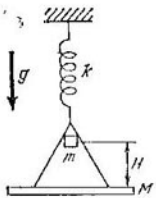


Para el problema 2.4.33.

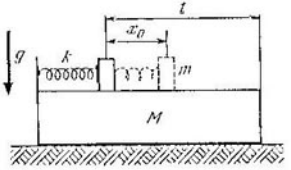
atravesar volando el anillo, si este último al principio se encontraba en reposo. La prueba se llevó a cabo en la ingravidez. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá?

2.4.33. En una barra de longitud l y masa M, situada en una superficie horizontal lisa, descansa un cuerpo de masa m. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y la barra es μ. ¿Con qué velocidad mínima deberá moverse el sistema para que después de una colisión elástica de la barra contra la pared el cuerpo se desprenda de la barra?

2.4.34*. Sobre un soporte de masa M, colgado de un muelle de rigidez k, cae desde la altura H un cuerpo de masa m y se adhiere a él. Determínese el alargamiento máximo del muelle.



Para el problema 2.4.34*.

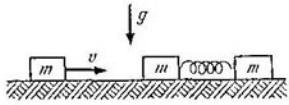


Para el problema 2.4.35.

2.4.35. El sistema, mostrado en la figura, se encuentra sobre cierta superficie horizontal lisa. La masa de la barra es M y la masa del cuerpo superior, cuyas dimensiones pueden menospreciarse, es m.

La rigidez del muelle es k. El cuerpo no está fijado al muelle. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y la barra es μ. El muelle se comprime mediante el cuerpo en x_0 y luego se deja libre. La distancia del cuerpo hasta el extremo de la barra en el instante del «disparo» es l. Hállese la velocidad de la barra una vez que el cuerpo se desprenda de ella.

2.4.36. Contra un sistema en reposo que se encuentra en una superficie horizontal lisa y que consta de dos cuerpos con masas m,



Para el problema 2.4.36.

unidos por un muelle, choca a la velocidad v cierto cuerpo de la misma masa. La colisión es elástica. Búsquese el alargamiento máximo del muelle. La rigidez del muelle es k.

§ 2.5. Gravitación. Leyes de Kepler

2.5.1. Se da una esfera fina de radio R y masa M. Determínense la intensidad del campo y el potencial en todo el espacio.

2.5.2*. Trácense las gráficas de la intensidad del campo y del potencial, que crea una capa esférica de masa M, en función de la distancia hasta el centro. El radio exterior de la capa es R_1 y el interior, R_2.

2.5.3. Determínense la intensidad del campo y el potencial, que crea una esfera de radio R y de densidad uniforme, en dependencia de la distancia hasta el centro de la esfera. La masa de la esfera es M.

2.5.4. Determínense la fuerza y energía de interacción de dos esferas de masas de 10^3 kg. La distancia entre los centros de las esferas es de 10 m.

2.5.5. Hállese la fuerza con que Vd. es atraído a la Tierra, a la Luna y al Sol.

2.5.6. ¿En cuántas veces la fuerza de gravedad de un cuerpo en la superficie de la Tierra supera la fuerza de gravedad de este mismo cuerpo a las alturas de 100 km y 1000 km?

2.5.7. ¿A qué distancia respecto a la Tierra en la recta Tierra — Luna la atracción del cuerpo hacia la Tierra y la Luna son iguales en módulo?

2.5.8. Un cuerpo de masa m se mueve por el ecuador a la velocidad v. Búsquese la fuerza con la que el cuerpo ejerce sobre la superficie terrestre. Estúdiense los casos del movimiento del cuerpo del oeste al este y del este al oeste.

2.5.9. Para la Tierra búsquense las velocidades circular o primera velocidad cósmica y la de escape o segunda velocidad cósmica.

2.5.10. ¿Qué empuje deberá desarrollar el motor en un satélite de la Tierra con masa m para que éste se mueva por una órbita de radio R a la velocidad que supera dos veces la velocidad del movimiento libre por la órbita del mismo radio.

2.5.11. ¿A qué altura es necesario lanzar un satélite en el plano ecuatorial para que permanezca todo el tiempo sobre un mismo punto de la superficie terrestre?

2.5.12*. ¿Cuál debe ser la velocidad mínima del proyectil de Jules Verne para que vaya a parar a la Luna? ¿Qué velocidad tendrá el proyectil en las inmediaciones de la superficie de la Luna?

2.5.13. Un cohete lanzado verticalmente en el polo de la Tierra ascendió a la altura de 3200 km y empezó a descender. ¿Qué camino recorrerá el cohete durante el primer segundo de su caída?

2.5.14*. Un cuerpo fue lanzado a lo largo del ecuador en dirección del este al oeste con tal velocidad que muy lejos de la Tierra aquélla se anuló. Este mismo cuerpo fue lanzado con idéntica velocidad respecto a la Tierra también a lo largo del ecuador, pero en dirección contraria. ¿Con qué velocidad se moverá a una distancia muy grande de la Tierra?

2.5.15*. ¿A qué altura ascenderá un proyectil si le comunicaron verticalmente hacia arriba la primera velocidad cósmica en el polo de la Tierra?

2.5.16*. La nebulosa anular posee una masa aproximadamente de $4 \cdot 10^{11}$ masas solares y un diámetro de unos 10^5 años luz. ¿Qué velocidad es necesario comunicar a un cuerpo que se encuentre en su extremo para que abandone este sistema estelar?

2.5.17*. La segunda velocidad cósmica para la Tierra es de 11,2 km/s. ¿Qué velocidad tendrá el proyectil lejos de la Tierra si fue lanzado del polo a la velocidad de 12 km/s?

2.5.18. Determínese en cuántas veces la masa del planeta Marte es inferior a la masa de la Tierra, si se sabe que el satélite de Marte Fobos gira en torno a este planeta por una órbita de radio de 9400 km con un período de 7 h 39 min.

2.5.19. Compárense los períodos de revolución de dos satélites uno de los cuales se mueve alrededor de la Tierra y el segundo, en torno a la Luna. Las órbitas de los satélites son circulares y pasan en las cercanías de la superficie de dichos astros.

2.5.20. La distancia media de la Tierra al Sol es de $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Estímese la masa del Sol.

2.5.21. Dos masas m_1 y m_2 se mueven una respecto de la otra de manera que la distancia entre ellas permanece constante e igual a a. Búsquese la energía total del sistema.

2.5.22. ¿Cómo cambiaría la duración de un año terrestre, si la masa de la Tierra aumentase y se hiciese igual a la masa del Sol, mientras que la distancia entre ellos seguiría siendo la misma?

2.5.23*. Dos cuerpos idénticos se mueven de manera que en

cierto instante la velocidad de uno de ellos forma un ángulo agudo con la dirección hacia el segundo cuerpo que en el momento dado de tiempo posee velocidad nula. Hállese el ángulo entre las direcciones de las velocidades de dichos cuerpos en el instante en que la distancia entre los mismos de nuevo vuelva a ser la inicial.

2.5.24. Dos estrellas describen, bajo la acción de su atracción mutua, órbitas circulares alrededor de un centro común de masas con un período de 2 años. La suma de las masas de ambas estrellas es igual a dos masas solares. Hállese la distancia entre las estrellas, sabiendo que la distancia media entre la Tierra y el Sol es de 150 millones de km. La masa de la Tierra en comparación con la del Sol es menospreciablemente pequeña.

2.5.25. Determínese la tensión del cable que une dos naves cósmicas de masas m, que giran alrededor de la Tierra distando de ella R_1 y R_2 de manera que el cable está siempre dirigido en sentido contrario al de la Tierra.

2.5.26*. Hállese la relación de las fuerzas de mareas altas, causadas por la acción de la Luna y el Sol.

2.5.27*. Un satélite con una masa de 10^3 kg, lanzado a una órbita circular de altura de 500 km sobre la superficie terrestre, va frenándose en la atmósfera. ¿A qué altura se encontrará el satélite dentro de un mes si: a) la fuerza de frenado por parte de la atmósfera es de $2{,}07 \cdot 10^{-3}$ N; b) la aceleración angular observable del satélite es igual a $3 \cdot 10^{-13}$ rad/s^2.

2.5.28. Una nave cósmica se mueve hacia la Luna influida por su atracción. A gran distancia la velocidad de aquélla con relación a la Luna es nula. La aceleración de la caída libre en la superficie de la Luna es 6 veces menor que la correspondiente en la Tierra ($g_L = g/6$). El radio de la Luna es aproximadamente 1700 km. ¿A qué altura h deberá conectarse el motor de frenado para realizar un descenso suave, si se considera que el motor crea una carga de $5g$? Menospréciense la variación de la masa de la nave al frenar y la dependencia entre la fuerza de atracción y la altura en la etapa de frenado.

2.5.29. A lo largo de diámetro de la Tierra fue perforado un pozo. Cierto cuerpo comienza a descender al pozo, siendo su velocidad inicial nula. Determínese la velocidad del cuerpo en el centro de la Tierra, considerándola homogénea.

2.5.30. ¿Qué velocidad será necesario comunicar a un cuerpo de masa pequeña, situado en el centro de un asteroide de masa M y radio R, para que, atravesando un pozo radial, pueda escaparse a la infinidad? La densidad del asteroide es constante.

2.5.31. Un satélite de la Tierra de masa m se mueve por una órbita circular, cuyo radio es igual al radio doble de aquélla. ¿Qué impulso habrá que transmitir instantáneamente al satélite, para que el plano de la órbita gire en un ángulo α, en tanto que el radio permanezca sin variar? El radio de la Tierra es R.

2.5.32. Una nave cósmica de masa m, volando en las inmediaciones de un asteroide, se desvía en un ángulo α. El impulso de la nave,

inicialmente igual a p_0, se convirtió en p. Determínese la masa del asteroide.

2.5.33*. Hacia una masa puntual m en reposo llega otra masa idéntica proveniente de la infinidad a la velocidad v, siendo su pará-

Para el problema 2.5.33*.

metro de impacto ρ. Hállese la distancia mínima a que se aproximarán estas masas.

2.5.34*. Desde la infinidad hacia la Tierra se mueve un flujo homogéneo de meteoritos, que contiene en la unidad de volumen n partículas. La masa de cada meteorito es m y la velocidad en la infinidad es v_0. Hállese la masa de la substancia meteorítica que se precipitará sobre la Tierra durante el tiempo t. El radio de la Tierra es R y la aceleración de la caída libre en la superficie terrestre es g.

2.5.35. Un proyectil se lanza a la primera velocidad cósmica bajo cierto ángulo al horizonte. ¿Qué trayectoria describirá el proyectil?

2.5.36. La distancia máxima del cometa de Halley respecto al Sol es $h = 35{,}4$ y la mínima, $l = 0{,}59$ (como unidad se toma la distancia entre la Tierra y el Sol). La velocidad lineal del movimiento del cometa $v_1 = 0{,}91$ km/s en el punto de su alejamiento máximo respecto al Sol, es decir, en el afelio. ¿Cuál será la velocidad lineal v_2 del cometa cuando se encuentra a la menor distancia del Sol, o sea, en el perihelio? ¿En qué año el cometa se verá desde la Tierra, si su último paso en las cercanías del Sol se observó en el año 1910?

2.5.37*. Un satélite, que se movía por una órbita circular de radio R_s, fue frenado y comenzó a moverse por una trayectoria elíptica, tangente a la superficie del planeta. Determínese el tiempo en que el satélite caerá sobre el planeta. El radio del planeta es R.

2.5.38*. Determínese el tiempo de caída de la Tierra sobre el Sol, si ésta se parase de repente.

2.5.39*. Desde una torre, situada en la superficie de cierto planeta, se lanzan dos proyectiles con la misma velocidad v. La velocidad inicial del primer proyectil está dirigida de manera que sigue la dirección del radio del planeta. La velocidad inicial del segundo proyectil es perpendicular al radio del planeta y describe una trayectoria elíptica. ¿Cuál de los proyectiles alcanzará el máximo alejamiento del planeta? Hállese la relación R_1/R_2 de las distancias máxi-

mas posibles con relación al centro del planeta. La velocidad

$$\sqrt{2gR} > v > \sqrt{gR},$$

donde R es el radio del planeta.

2.5.40*. El satélite de un planeta se mueve por una órbita circular a la altura h sobre la superficie del mismo. Es necesario pasarlo a una órbita elíptica con el alejamiento máximo de la superficie del planeta H y la distancia mínima h. ¿En cuánto habrá que cambiar la velocidad del satélite para conseguir esto? ¿Cuál será el período de revolución del satélite por la nueva órbita elíptica? El radio del planeta es R y su masa M.

2.5.41*. Dos cuerpos idénticos se mueven alrededor de la Tierra en una misma dirección por trayectorias tangentes. El primer cuerpo se mueve por una circunferencia de radio R. El segundo cuerpo posee un período de revolución dos veces mayor que el primero. Ambos cuerpos se acoplan. Determínese la distancia máxima del cuerpo formado con relación al centro de la Tierra.

2.5.42*. Dos bogatirs (héroes de la épica rusa) en el polo de la Tierra lanzaron por la vertical hacia arriba unas mazas. La primera de éstas cayó al cabo de una semana y la segunda, al cabo de 30 días. Estímese en cuánto se diferenciaban sus velocidades iniciales.

2.5.43*. Se requiere poner una nave cósmica en órbita circunsolar con perihelio de 0,01 del radio de la órbita terrestre y un período de revolución coincidente con el período de rotación de la Tierra alrededor del Sol. ¿Con qué velocidad y en qué dirección con respecto a la recta Tierra — Sol es necesario lanzar la nave desde la Tierra? La velocidad orbital de la Tierra es de 30 km/s.

§ 2.6. Rotación de un sólido

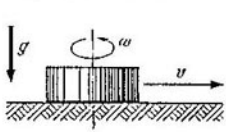
2.6.1. Determínese la energía cinética de un anillo fino de radio R y masa M, acelerado hasta adquirir la velocidad angular ω. ¿Será mayor o menor esta energía de la correspondiente a un disco enterizo de idénticos radio y masa?

2.6.2. Un volante en forma de anillo con masa m y radio r (con rayos imponderables) se impulsó hasta lograr la velocidad angular ω y luego se dejó que girase libremente. El volante se paró influenciado por las fuerzas de fricción. Hállese el momento de las fuerzas de fricción, considerando que éste es constante y teniendo en cuenta que: a) el volante se paró al cabo del tiempo τ; b) el volante antes de pararse realizó N revoluciones. ¿Qué energía se liberó en este caso en forma de calor?

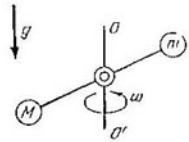
2.6.3. Un aro fino de radio R se puso en rotación alrededor de su eje hasta alcanzar la velocidad angular ω y se colocó de plano sobre una mesa horizontal. ¿Dentro de cuánto tiempo el aro se parará si el coeficiente de fricción entre la mesa y el aro es μ? ¿Cuántas revoluciones efectuará el aro?

2.6.4*. Determínese cuánto tiempo necesitará para pararse un disco de radio R que fue impulsado hasta lograr la velocidad angular ω y después colocado de plano en una mesa. El coeficiente de fricción entre el disco y la mesa es μ.

2.6.5. A una arandela, yacente sobre una superficie rugosa horizontal, se le comunica un movimiento giratorio con velocidad angular ω y un movimiento de traslación a velocidad v. En qué caso la arandela recorrerá mayor distancia hasta pararse: cuando $\omega = 0$ ó $\omega \neq 0$ (siendo v en los dos casos igual)?



Para el problema 2.6.5.

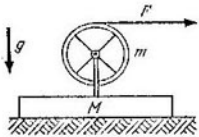


Para el problema 2.6.7.

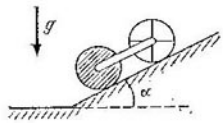
2.6.6. Diez hormigas decidieron llevarse de la mesa una astilla pequeña que se encuentra sobre ella. ¿Cómo deberán actuar, si la fuerza con que cada hormiga puede tirar de la astilla es algo inferior a una décima de la fuerza de fricción que obra sobre la astilla pequeña al moverse ella con respecto a la mesa?

2.6.7. Un halterio con bolas de masas m y M, unidas mediante una barra de longitud l, gira a una velocidad angular ω alrededor del eje vertical OO' que atraviesa el centro del halterio. Determínese el ángulo que forman el eje del halterio y el eje de rotación.

2.6.8. En una mesa horizontal lisa descansa cierta barra de masa M. En ella se fija un cilindro de paredes delgadas con una masa



Para el problema 2.6.8.



Para el problema 2.6.10

m y radio R que puede girar sin fricción alrededor de su eje. Un hilo fino imponderable se enrolla alrededor del cilindro. Se tira por el cabo de este hilo con la fuerza horizontal F. Hállense la aceleración de la barra y la aceleración angular del cilindro.

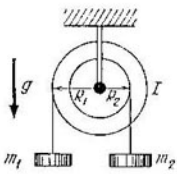
2.6.9. Búsquese la aceleración con que rodará sin deslizamiento por un plano inclinado con ángulo α: a) un cilindro de paredes delgadas; b) un cilindro macizo. Hállense las fuerzas de fricción que actúan sobre los cilindros.

2.6.10*. Los ejes de dos cilindros uno de paredes delgadas y otro macizo se unen mediante un vástago imponderable. Los cilindros ruedan sin deslizamiento por un plano inclinado con ángulo α. Los radios de los cilindros son iguales y la masa de cada cilindro es m. Determínese la tensión en el vástago.

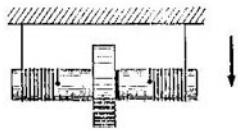
2.6.11. Un cilindro macizo de masa m se fija en el eje horizontal. Sobre el cilindro se enrolla un cordón, a cuyo cabo libre se cuelga una pesa de masa M. ¿Con qué aceleración descenderá la pesa, si la soltamos? El cordón no se desliza respecto al cilindro.

2.6.12. Sobre una polea cilíndrica escalonada se enrollan en sentidos contrarios dos hilos ligeros con masas m_1 y m_2. Hállense las aceleraciones de las cargas y las tensiones de los hilos. El momento de inercia de la polea es I.

2.6.13. Un disco macizo se fija a presión en un rodillo de radio r. El momento total de inercia para todo el sistema con respecto al



Para el problema 2.6.12.



Para el problema 2.6.13.

eje es I y su masa, m. Al rodillo se sujetan hilos de la misma longitud, con ayuda de los cuales el sistema se suspende. Sobre el rodillo de modo simétrico se enrollan los cabos libres de los hilos en una fila, por lo que el disco resulta elevado, acto seguido sueltan el disco permitiéndole descender libremente. Hállese la aceleración del eje del disco y la tensión de los hilos.

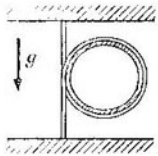
2.6.14*. Los cabos de una cuerda pesada homogénea se amarran a dos planos paralelos horizontales y ésta abarca a un aro imponderable. Determínese con qué aceleración éste descenderá.

2.6.15. Determínese la aceleración de un barril cilíndrico lleno de líquido, que rueda sin deslizamiento por un plano inclinado que forma un ángulo α con el horizonte. Menospréciese la fricción entre el líquido y las paredes del barril. La masa del líquido es m. Considérese que la masa del barril M está concentrada en la superficie lateral del cilindro.

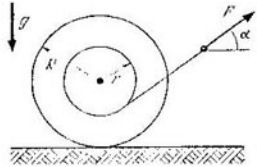
2.6.16*. Una bobina de hilo con masa m descansa sobre un plano horizontal. El momento de inercia de la bobina respecto a su eje es I. La bobina es arrastrada por el hilo con una fuerza F. ¿En caso de qué ángulos α entre la fuerza y el horizonte la bobina se moverá de modo acelerado en dirección del hilo tirante? ¿Qué fuerza F deberá

aplicarse para que no haya deslizamiento? El coeficiente de fricción entre la bobina y el plano es μ.

2.6.17*. Un anillo fino de radio R y masa m se impulsa hasta obtener la velocidad angular ω y se pone verticalmente sobre un plano horizontal con el coeficiente de fricción μ. ¿Qué parte de la energía inicial se transformará en calor? ¿Con qué velocidad se



Para el problema 2.6.14*.



Para el problema 2.6.16*.

moverá el anillo al cesar el deslizamiento? ¿Qué camino recorrerá el anillo hasta que cese el deslizamiento? Trácese la gráfica de la dependencia entre la aceleración del anillo y el tiempo.

2.6.18*. Un cilindro homogéneo de radio R y masa m en el instante inicial se deja rodar por un plano horizontal de manera que se desliza por éste sin rodamiento. El coeficiente de fricción entre el cilindro y la superficie es μ. ¿Qué parte de la energía inicial del cilindro se transformará en calor? ¿Qué distancia recorrerá el cilindro antes de que su movimiento se convierta en rodamiento sin deslizamiento? ¿Qué velocidad tendrá el cilindro después de terminar el deslizamiento? La velocidad inicial del cilindro v está dirigida perpendicularmente a su eje.

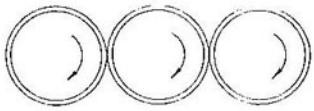
2.6.19*. Por el suelo horizontal rugoso rueda sin deslizamiento a la velocidad v cierto anillo fino. ¿Dentro de cuánto tiempo después de una colisión elástica contra la pared vertical el anillo se parará, si el coeficiente de fricción es igual a μ?

2.6.20*. Un cilindro homogéneo de radio R y masa m se hace girar hasta alcanzar la velocidad angular ω y se pone en un plano inclinado con un ángulo α en su base. ¿A qué altura ascenderá el cilindro? El coeficiente de fricción entre el cilindro y el plano inclinado es igual a μ, $\mu > \operatorname{tg} \alpha$.

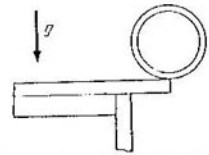
2.6.21. Tres cilindros idénticos de paredes delgadas, que se impulsaron hasta alcanzar cierta velocidad angular, se ponen en contacto. Los ejes de dichos cilindros son paralelos y están fijos. Determínese qué parte de la energía se transformará en calor?

2.6.22*. Un anillo de radio R se desprende sin deslizamiento del borde de una mesa de altura H. ¿A qué distancia de la mesa caerá este anillo? ¿A qué distancia, mayor o menor, caerá una esfera del mismo radio?

2.6.23*. Un palillo fino de longitud l y masa m se coloca simétricamente en dos apoyos que distan uno del otro a. Uno de los apoyos se retira. Hállese la fuerza de la reacción del apoyo que queda en el primer instante.



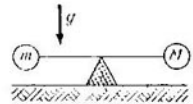
Para el problema 2.6.21.



Para el problema 2.6.22*.

2.6.24*. Una varilla imponderable, en cuyos extremos están fijadas las masas m y M, se apoya en el centro sobre un soporte rígido. En el instante inicial la varilla se encuentra horizontalmente e inmóvil. ¿Con qué fuerza presiona en ese instante sobre el soporte?

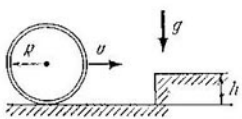
Para el problema 2.6.23*.



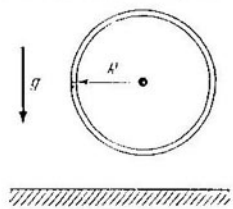
Para el problema 2.6.24*.

2.6.25. Estímese cuántas vueltas (volteretas) realizará un automóvil que a toda velocidad se derrumba a un precipicio de un kilómetro de profundidad.

2.6.26*. Hállese la altura a que saltará el arco de radio R al chocar contra la pared de altura h, si la velocidad de aquél es v.



Para el problema 2.6.26.



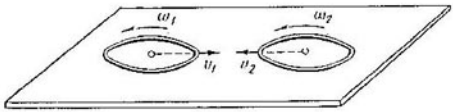
Para el problema 2.6.27.

Examínense los casos de colisiones sin fricción y con fricción, suponiendo que no hay deslizamiento. Antes de chocar el aro no giraba.

2.6.27. Al caer verticalmente al plano el aro se refleja bajo un ángulo de 30° hacia la vertical. El radio del aro es R. ¿Con qué velo-

cidad angular giraba el aro antes de la colisión, si después de ésta la velocidad de su movimiento de traslación es v y cesó de girar?

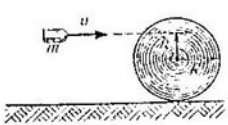
2.6.28. Dos anillos finos idénticos se mueven a velocidades v_1 y v_2 uno al encuentro del otro por una superficie lisa horizontal. Las



Para el problema 2.6.28.

velocidades angulares de los anillos son ω_1 y ω_2. Determínense las velocidades angulares de los anillos después de chocar, si en el último instante de la colisión no hay deslizamiento mutuo de los mismos.

2.6.29. Al cilindro de masa M y radio R que descansa sobre un plano, va a parar cierta bala de masa m que vuela a la velocidad v. La bala vuela paralelamente al plano a una altura h respecto al centro del cilindro. Considerando la colisión absolutamente no elástica y $m \ll M$, hállense la velocidad lineal del centro y la velocidad angular del cilindro. No existe fricción.



Para el problema 2.6.29.

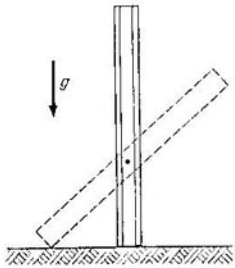
2.6.30. Sobre un disco horizontal homogéneo en reposo de masa M y radio R se encuentra cierta persona de masa m. El disco puede girar sin fricción alrededor del eje vertical que pasa por su centro. En cierto instante la persona comenzó a moverse. ¿Con qué velocidad angular girará el disco cuando la persona se mueve describiendo una circunferencia de radio r alrededor del eje del disco a la velocidad v respecto a éste?

2.6.31. En el borde de un disco con radio R y momento de inercia I, que gira libremente a la velocidad angular ω alrededor del eje vertical, se encuentra cierta persona de masa m. ¿Cómo cambiará la velocidad de rotación del disco, si la persona pasa del borde del disco a su centro? ¿Cómo variará la energía cinética del sistema en este caso? Menospréciense las dimensiones de la persona en comparación con las dimensiones del disco.

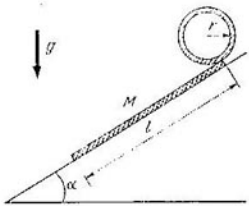
2.6.32*. Un lápiz de longitud l cae de la posición vertical sobre una superficie horizontal lisa. Determínese la velocidad del extremo superior del lápiz en el instante en que éste choca contra la superficie.

2.6.33. Un cilindro de paredes delgadas con masa m y radio r empieza a deslizarse por un plano inclinado (la velocidad inicial

$v_0 = 0$), enrollando en sí una cinta fina adhesiva, cuya masa es M y longitud l. ¿Qué velocidad tendrá el centro del cilindro cuando toda la cinta esté enrollada? ($2\pi r \ll l$).



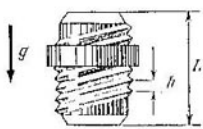
Para el problema 2.6.32*.



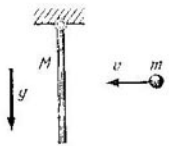
Para el problema 2.6.33.

2.6.34. Una tuerca, cuya masa está concentrada en una circunferencia de radio R, se desliza sin fricción por la rosca de una varilla. La longitud de ésta es L y el paso de rosca es h. Búsquese la velocidad de la tuerca en el instante en que ésta se desprende de la barra.

2.6.35. Una varilla fina de masa M y longitud l descansa sobre una superficie absolutamente lisa. Cierta bola de masa M con velocidad v, dirigida perpendicularmente a la varilla, choca contra uno de sus extremos. Considerando la colisión absolutamente no elástica, hállese la cantidad de calor desprendido. Considerando que la colisión es elástica, búsquese la velocidad de la bola después de chocar.



Para el problema 2.6.34.

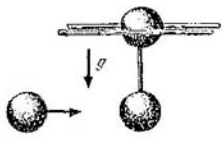


Para el problema 2.6.36.

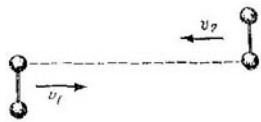
2.6.36. Una varilla homogénea de masa M y longitud l está suspendida por un extremo de una charnela sin fricción. Un pequeño trozo de masilla de masa m se adhiere a la varilla al nivel de su centro. Antes de adherirse, la velocidad de la masilla era horizontal e igual a v. Hállese el ángulo máximo de desviación de la varilla con respecto a la vertical.

2.6.37*. ¿Con qué parte de un palo largo es necesario dar un golpe para que la mano no lo sienta?

2.6.38. Un halterio que consta de dos bolas con masas iguales está suspendido entre dos guías, de manera que la bola superior puede deslizarse por ellas libremente en dirección horizontal. Contra la bola inferior choca de modo absolutamente elástico otra bola de la misma masa que vuela horizontalmente. ¿Cuál deberá ser la velocidad de esta bola para que el halterio pueda ocupar la posición horizontal? La distancia entre los centros de las bolas es l.



Para el problema 2.6.38.

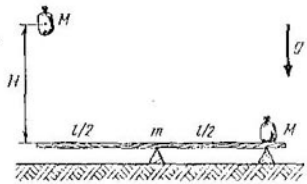


Para el problema 2.6.39.

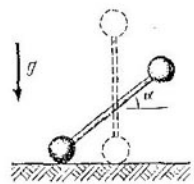
2.6.39. Dos halterios idénticos vuelan al encuentro con velocidades v_1 y v_2 de la manera mostrada en la figura. La distancia entre las bolas del halterio es l. ¿Cómo se moverán los halterios después de una colisión elástica?

2.6.40*. ¿Qué altura alcanzará un saco de arena lanzado con ayuda de una tabla de masa m y longitud l, si sobre el otro extremo de la tabla desde la altura H cae otro saco idéntico de arena? La masa de cada saco de arena es M.

2.6.41*. Sobre una plataforma homogénea redonda de radio R caen calabobos (lluvia menuda). La velocidad de las gotas es v y su masa sumaria en unidad de volumen es ρ. La masa de la plata



Para el problema 2.6.40*.



Para el problema 2.6.42*.

forma junto con el agua es M. ¿Qué potencia deberá tener el motor que impulsa la plataforma para que ésta gire con una velocidad angular constante ω? La fricción de las gotas contra la plataforma es grande, de manera que puede menospreciarse su velocidad radial al escurrirse de la plataforma.

2.6.42*. Determínese la fuerza que ejerce sobre un plano horizontal liso el halterio en caída en el instante en que el eje del halterio forma el ángulo α con el horizonte. El halterio empieza su movimiento desde la posición vertical sin velocidad inicial. La masa de cada bola del halterio es m.

§ 2.7. Estática

2.7.1. En la figura se dan dos sistemas mediante los cuales se sostiene una carga de 10 kg. Los cables en las figuras se muestran con líneas finas y la barra, con línea doble. En el caso b) un extremo de la barra está unido a la pared y por encima del otro extremo se echa el cable. Determínese la tensión de los cables en el caso a) y la fuerza que ejerce el cable sobre la barra en el caso b).

2.7.2. Un lápiz de masa 0,01 kg está colocado verticalmente sobre un muelle en un plumero cerrado. Al dar la vuelta a éste, el lápiz comenzó a presionar sobre la tapa con una fuerza 1,2 veces mayor. ¿Con qué fuerza el lápiz presionaba inicialmente sobre la tapa?

2.7.3. Determínese la altura máxima de una casa que puede construirse de ladrillo, si el límite de resistencia a la compresión del ladrillo es igual a 10^7 Pa y la densidad de éste es de $1{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3.

2.7.4*. ¿Qué forma debe tener un edificio para que la presión a lo largo del eje vertical a cualquier altura sea la misma?

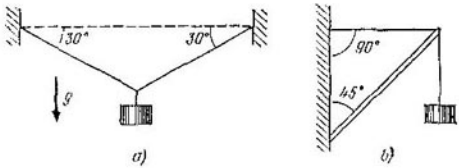
2.7.5. A través de tres orificios practicados en la tapa de la mesa se dejan pasar hilos que están unidos de un cabo en un nudo común. Al otro cabo de cada hilo se cuelgan cargas iguales. Hállense los ángulos entre los hilos. No hay fricción.

2.7.6. ¿Qué ángulo de inclinación hacia el horizonte deberá tener el plano para que la bola abandone el hoyo situado en este mismo plano? La profundidad del hoyo es dos veces inferior al radio de la bola.

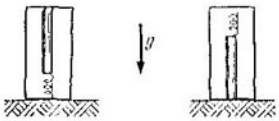
2.7.7. Una bola de radio r y masa m se retiene en una esfera inmóvil de radio R mediante un hilo imponderable de longitud l sujeto al punto superior de la esfera C. No hay otros puntos de contacto entre el hilo y la esfera. Menospreciando la fricción, hállese la tensión del hilo.

2.7.8. Dos cargas se unen mediante un hilo imponderable de longitud l y se ubican en una superficie lisa cilíndrica de radio R. En estado de equilibrio el ángulo entre la vertical y el radio, trazado al punto donde se encuentra la carga m_1, es igual a α. Búsquese la masa de la segunda carga.

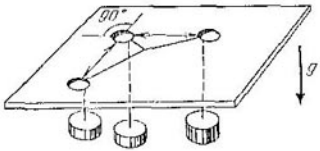
2.7.9. Un marco, hecho de alambre en forma de un triángulo rectángulo, se coloca en el plano vertical como viene mostrado en la figura. Dos cargas de masas $m_1 = 0{,}1$ kg y $m_2 = 0{,}3$ kg, unidas por un hilo, se deslizan sin fricción por el alambre. ¿Cuál será la tensión del hilo y el ángulo α en posición de equilibrio?



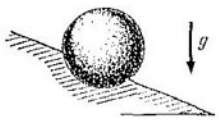
Para el problema 2.7.1.



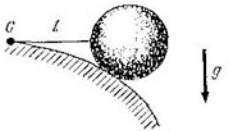
Para el problema 2.7.2.



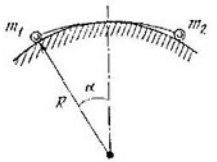
Para el problema 2.7.5.



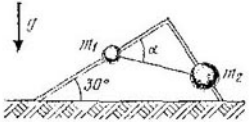
Para el problema 2.7.6.



Para el problema 2.7.7.

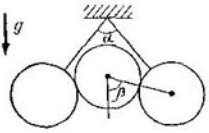


Para el problema 2.7.8.

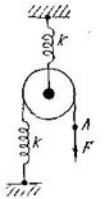


Para el problema 2.7.9.

2.7.10. Dos cilindros iguales están suspendidos de hilos inextensibles de idéntica longitud. Entre ellos se pone otro cilindro del mismo diámetro pero de doble masa. Determínese el ángulo β si el ángulo entre los hilos es igual a α. Menospréciese la fricción.



Para el problema 2.7.10.

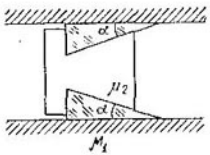


Para el problema 2.7.11.

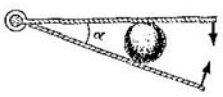
2.7.11. ¿En cuánto se desplazará el cabo de un hilo (punto A) que descansa sobre la polea móvil, si se le aplica la fuerza F? La rigidez de ambos muelles es k.

2.7.12. Si al extremo inferior de un muelle que está suspendido verticalmente se sujeta una carga, su longitud se hace igual a l_1. En tanto que al colgar esta misma carga en la mitad del muelle la longitud del muelle se hace l_2. Hállese la longitud del muelle no deformado.

2.7.13*. Un cuerpo con cuñas colocadas en sus lados, se ubica entre dos planos paralelos como muestra la figura. Hállese el ángulo



Para el problema 2.7.13*.



Para el problema 2.7.14.

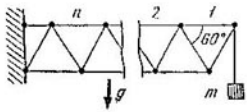
límite en el vértice de las cuñas, para el cual el cuerpo puede moverse a la derecha, pero no puede desplazarse a la izquierda. Los coeficientes de fricción de las cuñas con los planos y el cuerpo son iguales a μ_1 y μ_2. Menospréciese la fuerza de gravedad.

2.7.14. ¿Cuál deberá ser el coeficiente de fricción entre la bola y los planos para que la bola no «se escape» del ángulo diedro α, formado por dos planos, al intentar disminuir dicho ángulo? Menospréciese la fuerza de gravedad.

2.7.15. Entre dos barras idénticas de sección cuadrada, yacentes en el plano horizontal, se pone una cuña de la misma masa, pero con

una sección en forma de triángulo equilátero. ¿Cuál deberá ser el coeficiente de fricción máximo de las barras con el plano para que aquéllas empiecen a separarse? No hay fricción entre la cuña y las barras.

2.7.16*. Un sistema de varillas, unidas a charnela, se carga con una pesa de masa m, como viene mostrado en la figura. Determínese la fuerza de tracción en la n-ésima varilla horizontal superior.



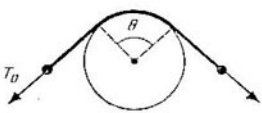
Para el problema 2.7.16*.

Para el problema 2.7.17.

2.7.17. Una cadena pequeña de masa m está suspendida por los extremos. La tensión de la cadena en el punto inferior es T. Hállese la tensión en los puntos de suspensión.

2.7.18*. En un poste cilíndrico se enrolla una espira de cable. Para que el cable no se deslice por el poste es necesario que, al tirar de uno de sus cabos con la fuerza F, del otro se tire con la fuerza f. ¿Cómo cambiará la fuerza f, si en el poste se enrollan n espiras de cable?

2.7.19*. Una cuerda abarca un poste en un segmento de ángulo θ. El coeficiente de fricción entre la cuerda y el poste es μ. ¿Qué fuerza



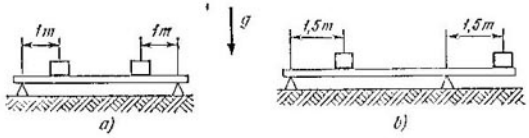
Para el problema 2.7.19*.

mínima es necesario aplicar a uno de los cabos de la cuerda para equilibrar la fuerza T_0 que se aplica al otro cabo?

2.7.20. En la figura se muestran vigas en las cuales se encuentran dos cargas con masas de 10 kg en cada una. La distancia entre los apoyos de las vigas es de 4 m. Hállense las presiones de las vigas sobre los apoyos. Las vigas son imponderables.

2.7.21. Una regla de masa de 0,01 kg yace sobre dos apoyos de la manera mostrada en la figura. Pongamos sobre el extremo libre de la regla una carga con masa m. ¿Hasta colocar qué masa m puede haber equilibrio?

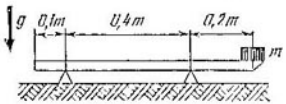
2.7.22. En tres muelles de la misma longitud, cuyas rigideces son k, $2k$ y k, se pone una viga como viene expuesto en la figura.



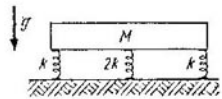
Para el problema 2.7.20.

Determínense las fuerzas que ejercen los muelles sobre la viga. La masa de la viga es M.

2.7.23. Una balanza de brazos desiguales se equilibra poniendo en uno de los platillos de aquélla una carga complementaria. ¿Se



Para el problema 2.7.21.

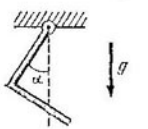


Para el problema 2.7.22.

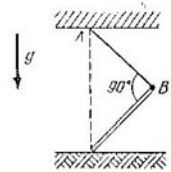
podrá usar ahora esta balanza para pesar de la misma manera que se hace en una corriente?

2.7.24. Al pesar en una balanza con brazos desiguales, la masa de cierto cuerpo en un platillo resultó ser de 3 kg y en el otro, de 3,4 kg. Determínese la masa verdadera del cuerpo.

2.7.25. Una barra pesada se dobla por el centro en 90° y se cuelga libremente por uno de sus extremos. ¿Qué ángulo con la vertical formará la parte sujeta?



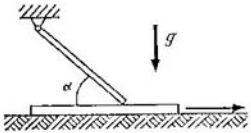
Para el problema 2.7.25.



Para el problema 2.7.26.

2.7.26. ¿Cuál deberá ser el coeficiente de fricción de una barra homogénea con el suelo para que pueda permanecer de la manera mostrada en la figura? La longitud del hilo AB es igual a la longitud de la barra.

2.7.27. Una hoja fina de papel se oprime hacia la mesa mediante una barra homogénea de masa m, cuyo extremo superior se sujeta de modo articulado. El ángulo entre la barra y la hoja es α y el coeficiente de fricción entre ellos, μ. No existe fricción entre la mesa y el papel. ¿Qué fuerza horizontal mínima es necesario aplicar a la hoja para sacarla?

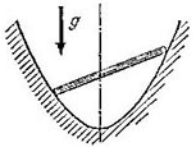


Para el problema 2.7.27.

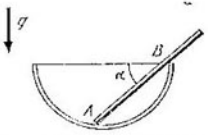
Para el problema 2.7.28.

2.7.28. ¿Con qué fuerza presiona un palillo de masa M, sumergido hasta la mitad en el agua del vaso cilíndrico, sobre la pared del mencionado vaso? El ángulo de inclinación del palillo respecto al horizonte es α. No hay fricción.

2.7.29*. Un palillo homogéneo tiene en el hoyo tres posiciones de equilibrio. Demuéstrese que la posición horizontal de equilibrio es inestable, si las otras dos posiciones de equilibrio del palillo son



Para el problema 2.7.29*.



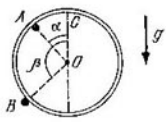
Para el problema 2.7.30.

estables. No existe fricción entre los extremos del palillo y las paredes del hoyo.

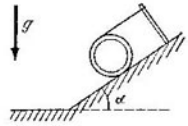
2.7.30. En una semiesfera lisa fijada yace libremente un palillo de masa M de manera que su ángulo con el horizonte es igual a α y uno de los extremos sale del borde. ¿Con qué fuerza actúa el palillo sobre la semiesfera en los puntos de contacto A y B?

2.7.31. Un aro fino redondo y liso de masa m está sujetado a la pared con ayuda de dos clavos. El primero de ellos se encuentra dentro del aro (punto A) y lo toca de manera que el radio, trazado al punto de tangencia A, forma con la vertical OC el ángulo $AOC = \alpha$. El segundo clavo está fuera del aro (punto B), el ángulo correspondiente $BOC = \beta$. Hállese con qué fuerza el aro presiona sobre cada clavo. No hay fricción.

2.7.32. En un cilindro se enrolla un hilo, cuyo cabo se sujeta del montante en el punto superior del plano inclinado. El coeficiente de



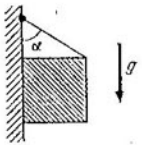
Para el problema 2.7.31.



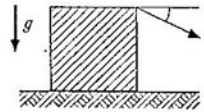
Para el problema 2.7.32.

fricción entre el cilindro y el plano es μ. ¿Hasta qué ángulo máximo α el cilindro no se deslizará del plano inclinado?

2.7.33. Al plano vertical se apoya un cubo que se sujeta mediante una cuerda fijada en la arista. ¿Hasta qué valores del ángulo α el cubo se encontrará en equilibrio, si el coeficiente de fricción entre el cubo y el plano es μ?



Para el problema 2.7.33.



Para el problema 2.7.34*.

2.7.34*. Un cubo se encuentra sobre una superficie horizontal. ¿Con qué fuerza mínima y bajo qué ángulo respecto al horizonte es necesario tirar del cubo por su arista superior para que se vuelque sin deslizamiento, si el coeficiente de fricción es igual a μ? La masa del cubo es m.

Para el problema 2.7.35.

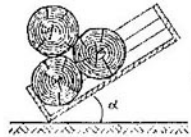
Para el problema 2.7.36.

2.7.35. En la habitación hay una escalera. El coeficiente de fricción del extremo inferior de la escalera con el suelo es μ_1 y el coefi-

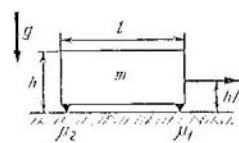
ciente de fricción del extremo superior de la escalera con la pared es μ_2. ¿Hasta qué ángulos α la escalera puede mantenerse en su posición?

2.7.36. Una bobina está suspendida en el techo mediante un hilo, enrollado en el radio menor r. En el radio mayor R se enrolla también el hilo, en cuyo cabo se cuelga una carga. ¿Cuál deberá ser la masa de la carga para que el sistema se encuentre en equilibrio? La masa de la bobina es M.

2.7.37*. ¿Manteniendo qué ángulos α los tres troncos en la caja del camión se encontrarán de la manera expuesta en la figura, si los troncos son iguales? Menospréciese la fricción.



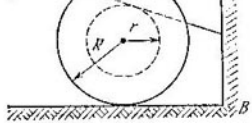
Para el problema 2.7.37*.



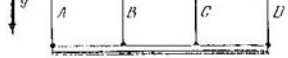
Para el problema 2.7.38*.

2.7.38*. En los extremos de una barra homogénea de masa m, altura h y longitud l, se sujetan rígidamente dos apoyos, cuyas dimensiones pueden menospreciarse. ¿Qué fuerza horizontal es necesario aplicar a la barra a la altura $h/2$ para que se mueva uniformemente, si los coeficientes de fricción entre los apoyos y el plano horizontal son iguales a μ_1 y μ_2?

2.7.39. Sobre una bobina, yacente en una mesa horizontal, presiona una cuña que puede desplazarse a lo largo del plano vertical AB. Los coeficientes de fricción de la bobina con la cuña y la mesa son idénticos e iguales a μ. ¿En caso de qué valor de μ la bobina



Para el problema 2.7.39.



Para el problema 2.7.40.

se desplazará a la izquierda, girando en sentido contrario a las agujas del reloj?

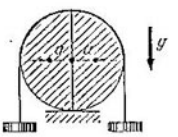
2.7.40. Una viga homogénea de longitud l estaba suspendida en cuatro cables, que distaban $l/3$ el uno del otro. El cable A se

retira. Para reducir el peligro de la ruptura se propone eliminar otro cable más. ¿Es razonable esta propuesta?

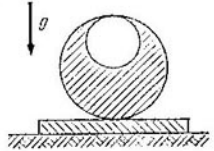
2.7.41. Un extremo de la viga de masa m se une con una charnela, con relación a la cual aquélla puede girar libremente. La viga se apoya sobre dos soportes iguales, cuyas partes superiores se encuentran en estado no deformado al mismo nivel que el eje de la charnela. Un soporte está situado en el centro de la viga y el segundo, en el extremo libre de la misma. ¿Con qué fuerzas presiona la viga sobre los soportes? La deformación de los soportes es insignificante, por eso la posición de la viga es prácticamente horizontal.

Para el problema 2.7.41.

2.7.42*. Un cilindro de radio R, constituido por dos mitades cortadas por el plano vertical que pasa por su eje, descansa sobre un



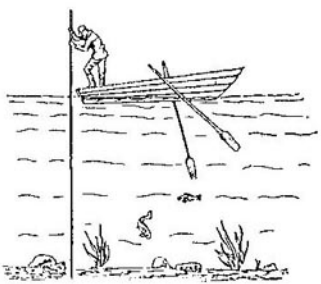
Para el problema 2.7.42*.



Para el problema 2.7.43.

soporte. La masa de cada mitad del cilindro es M y sus centros de masas distan a del eje del cilindro. Para que el cilindro no se desintegre, está abarcado por un hilo con cargas iguales en los cabos. Hállese la masa mínima de las cargas para la cual puede haber equilibrio. No existe fricción.

2.7.43. A una distancia $R/2$ del eje del cilindro y paralelamente a él se ha taladrado un orificio de radio $R/2$. El cilindro descansa sobre una tablita que comienza a levantarse lentamente por un extremo. Hállese el ángulo límite de inclinación de la tablita para el cual el cilindro aún puede permanecer en equilibrio. El coeficiente de fricción es μ.


Para el problema 2.7.44.

2.7.44. El pescador necesita desplazar su lancha. Con este propósito pone la pértiga perpendicularmente al fondo del embalse y,

apoyándose sobre el borde de la lancha, tira de la pértiga en dirección hacia sí. La pértiga no se desliza por el fondo, pero puede girar. ¿Se desplazará la lancha?

Capítulo 3

OSCILACIONES Y ONDAS

§ 3.1. Pequeñas desviaciones del equilibrio

3.1.1. En el centro de una cuerda tensada de longitud $2l$ viene fijada una esfera. ¿Qué fuerza ejerce la cuerda sobre la esfera durante el desplazamiento transversal $x \ll l$? La tensión de la cuerda T no depende del desplazamiento. ¿Por qué para desplazamientos pequeños puede considerarse que la dependencia entre la fuerza y x es lineal? ¿Cómo está dirigida la fuerza con relación al desplazamiento?

3.1.2. La figura muestra el estado de equilibrio. ¿Qué dependencia existe entre la fuerza sumaria que actúa sobre el cuerpo y sus desplazamientos pequeños x? La rigidez de ambos muelles es k, menospréciese la acción del campo de gravedad sobre el cuerpo.

3.1.3*. Supongamos que los muelles permanecen en estado no deformado y sus longitudes son iguales a l. Hállese la fuerza que actúa sobre el cuerpo en caso de pequeños desplazamientos horizontales x. La rigidez de los dos muelles es k.

3.1.4. Por un alambre encorvado de radio R puede deslizarse una carga de masa m. ¿Qué dependencia existe entre la fuerza que actúa sobre la carga y los desplazamientos x para el caso $x \gg y$?

3.1.5. Una carga pequeña de masa m, suspendida de un hilo, oscila en el plano vertical:

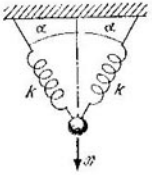
a) Cerciórese de que la fuerza sumaria que actúa sobre dicha carga en el punto C depende de la amplitud de las oscilaciones. Trácese el vector de esta fuerza en los puntos A, B, C y O (O es el punto inferior, A y B, los puntos extremos).

b) Hállese en el punto C la proyección de esta fuerza sobre la dirección del movimiento. ¿Por qué ella no depende de la amplitud de las oscilaciones y solamente queda definida por el ángulo α? Introdúzcase el desplazamiento x a lo largo de la trayectoria desde el punto inferior O y demuéstrese que, a pequeños desplazamientos, la proyección de la resultante sobre la dirección de la trayectoria es proporcional a x.

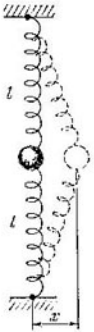
3.1.6. Hállese la dependencia de la energía potencial de una esfera de radio r y masa m con relación al desplazamiento pequeño x respecto de la posición de equilibrio de dicha esfera, si ésta se desliza a lo largo de la superficie del hoyo de radio R.

3.1.7. Un abalorio con carga q puede moverse por un hilo tensado

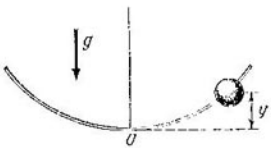
Para el problema 3.1.1.



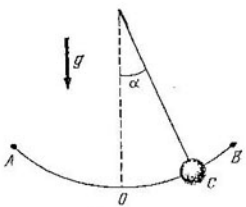
Para el problema 3.1.2.



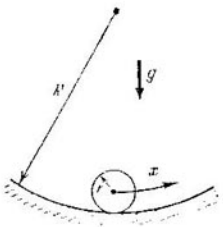
Para el problema 3.1.3.



Para el problema 3.1.4.



Para el problema 3.1.5.



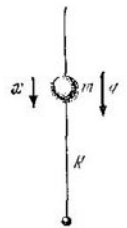
Para el problema 3.1.6.

de longitud $2l$, en cuyos cabos están fijadas dos cargas inmóviles Q. Hállese el incremento de la energía potencial cuando el abalorio se desplaza del centro en x a lo largo del hilo. Cerciórese de que, en caso de pequeños desplazamientos, el incremento de la energía potencial depende de modo cuadrático de x.

Para el problema 3.1.7.

Para el problema 3.1.8.

3.1.8. Una barra de acero se sujeta a un muelle de rigidez k. Para cualquier posición de éste sobre la barra actúa una fuerza magnética constante F. ¿Cómo dependerá la fuerza sumaria, que actúa sobre la barra, con relación al desplazamiento x desde la posición de equilibrio? ¿Por qué el carácter de esta dependencia no está relacionado con el valor de F?



Para el problema 3.1.9*.

3.1.9*. a) Un cuerpo cargado pequeño de masa m puede deslizarse por una aguja vertical no conductora, en cuyo punto inferior está fijada una carga inmóvil del mismo signo que la carga del cuerpo. En estado de equilibrio el cuerpo dista R de esa carga. ¿Qué dependencia existe entre la fuerza, que actúa sobre el cuerpo y los pequeños desplazamientos x respecto de la posición de equilibrio?

b) Manteniendo las cargas invariables, aumentamos la masa del cuerpo en tres veces. ¿Cuál será ahora la distancia entre el cuerpo y el extremo inferior de la aguja en equilibrio? ¿Cómo dependerá la fuerza, que actúa sobre el cuerpo, con relación a los pequeños desplazamientos respecto de la posición de equilibrio?

3.1.10. Una partícula de masa m se mueve por una circunferencia con el centro en el origen de coordenadas en el plano xOy a la velocidad angular ω. Hállense las proyecciones de la fuerza que actúa sobre la partícula en los ejes de coordenadas en el instante en que las coordenadas de la partícula son iguales a x e y.

3.1.11. Cierto cuerpo de masa m oscila en un resorte de manera que el valor máximo del módulo de la velocidad es v_0 y la desviación máxima con respecto a la posición de equilibrio (elongación) es x_0. Hállese la rigidez del resorte.

3.1.12. ¿Por qué parece que una lámpara, cuando oscila rápidamente en un muelle, se enciende en los puntos extremos?

3.1.13. Un cuerpo oscila en presencia de cierta fuerza de retorno, proporcional al desplazamiento, siendo su amplitud x_0. ¿En cuántas veces el tiempo necesario para pasar un tramo pequeño de longitud dx, que dista x respecto a la posición de equilibrio, supera

el tiempo en que pasa el mismo tramo dx en la proximidad de la posición de equilibrio?

3.1.14*. Supongamos que la energía potencial de un cuerpo depende cuadráticamente del desplazamiento x: $U = kx^2/2$, donde k es la rigidez. Siendo la velocidad del cuerpo en el punto x igual a v y la amplitud de las oscilaciones x_0, ¿a qué será igual la velocidad en el punto nx para la amplitud nx_0? Demuéstrese la independencia entre el período de las oscilaciones y la amplitud.

3.1.15. Llamaremos oscilador a un sistema vibratorio. A continuación consideraremos que la energía potencial del oscilador $U = kx^2/2$ y la cinética $K = mv^2/2$ (aquí x es la elongación $v = dx/dt$, k y m son coeficientes constantes). Trazando la coordenada por el eje de abscisas y la velocidad por el eje de ordenadas, represéntese la dependencia entre la velocidad y la coordenada del oscilador para su energía total E. La dependencia $v = x$ se denomina diagrama de fases y la gráfica de la dependencia entre v y x, curva de fases. Trácense las curvas de fases para algunos valores de la energía total. Reflexione sobre qué significa el carácter cerrado de estas curvas.

3.1.16*. Las curvas de fases (véase el problema 1.15) adquieren una forma bastante sencilla, si por el eje de ordenadas se trazan las magnitudes $u = \sqrt{mv}$ y por el de abscisas $q = \sqrt{kx}$. Cerciórense que en el diagrama $u = q$ la curva de fases para el oscilador representa una circunferencia. ¿Cuál es su radio?

A cada estado del oscilador —a la coordenada y velocidad— le corresponde un punto en este diagrama de las fases. ¿Cómo se mueve con el tiempo ese punto por la curva de fases? ¿En qué dirección?

3.1.17. Si se fija la energía total E, el estado del oscilador puede asignarse mediante el ángulo φ que se cuenta desde el eje q en sentido de las agujas del reloj hasta la dirección al punto del diagrama $u = q$ (véase el problema 3.1.16*), que representa el estado. Este ángulo se denomina fase. Exprésense la coordenada y velocidad mediante la fase φ. Hágase lo mismo, pero si se conoce no la energía total, sino la desviación máxima A.

3.1.18*. Para establecer la dependencia entre el estado del oscilador y el tiempo, sabiendo la energía total, es suficiente hallar de qué manera cambia la fase con el tiempo (véase el problema 3.1.17). Búsquese la velocidad de movimiento de un punto por la curva de fases. Para ello primero exprésense a través de u y q las componentes de dicha velocidad por la abscisa y ordenada, partiendo de las igualdades $dx/dt = v$ y $dv/dt = -(k/m)\,x$ y luego hágase uso del teorema de Pitágoras. Ahora demuéstrese que la velocidad angular en el diagrama de fases $\omega = \sqrt{k/m}$.

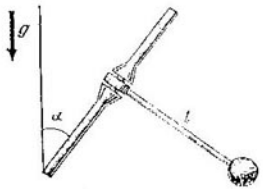
§ 3.2. Período y frecuencia de las oscilaciones libres

3.2.1. Una carga oscila por la vertical en un cordón de goma. ¿En cuánto variará el período de oscilaciones si la carga se cuelga del mismo cordón, pero doblado?

3.2.2. Una carga inmóvil suspendida de un muelle, lo alarga a la longitud l. ¿Qué período tendrán las oscilaciones verticales de la carga?

3.2.3. Hállese la longitud del péndulo matemático, cuyo período de pequeñas oscilaciones es 1 s.

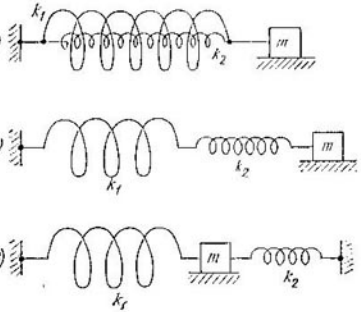
3.2.4. Para aumentar el período de las oscilaciones de un péndulo, sin aumentar excesivamente sus dimensiones, el eje del péndulo se instala bajo un ángulo α con respecto a la vertical. El péndulo es de por sí una barra rígida y ligera de longitud l con una carga en el extremo. Determínese el período de las oscilaciones pequeñas.



Para el problema 3.2.4.

3.2.5. Hállese el período de las oscilaciones pequeñas de un péndulo matemático de longitud l, si en el camino del hilo a la distancia $l/2$ por la vertical del punto de suspensión se fija un clavo.

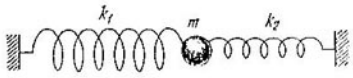
3.2.6. Hállese el período de las vibraciones de los osciladores que vienen expuestos en la figura. ¿Dependerá en el caso c) el período de la distancia entre las paredes? k_1 y k_2 son las rigideces de los muelles y m, la masa del cuerpo.



Para el problema 3.2.6.

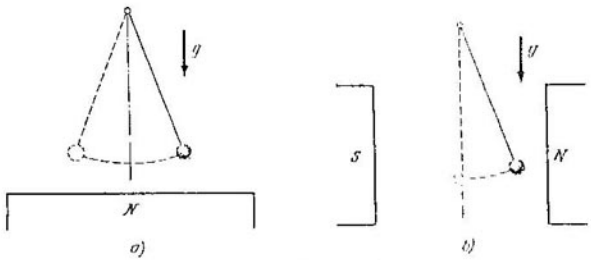
3.2.7. Dos resortes no deformados con rigideces k_1 y k_2 se sujetan a dos paredes. Entre ellos, contactando con los extremos libres, se encuentra una bola de masa m. Hállese el período de las oscilaciones

horizontales de la bola, si ésta no está sujeta a los resortes. ¿Cómo se relacionan las desviaciones máximas de la bola a la izquierda y a la derecha de la posición de equilibrio?



Para el problema 3.2.7.

3.2.8. a) El péndulo matemático —una bola de hierro de masa m suspendida de un hilo largo— posee el período T_0. En presencia de un imán, situado un poco más abajo de la bola por la vertical, el período de oscilaciones se volvió T. Determínese la fuerza magnética que actúa sobre la bola.



Para el problema 3.2.8.

b) La bola de dicho péndulo se coloca entre los polos del imán, de manera que sobre ella ejerce una fuerza magnética horizontal. Hállense esta fuerza y la nueva posición de equilibrio, si el período de las pequeñas oscilaciones se hizo T.

3.2.9*. En las inmediaciones de un yacimiento de minerales el período de oscilaciones del péndulo cambió en 0,1 por cien. La densidad del mineral en el yacimiento es de 8 g/cm³. Estímese el tamaño del yacimiento, si la densidad de la Tierra es de 5,6 g/cm³ y su radio es 6400 km.

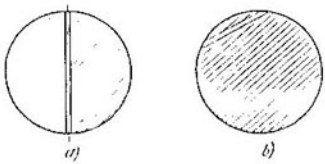
3.2.10. Las mediciones de la frecuencia angular (pulsación) de las oscilaciones transversales de una masa m, fijada en el centro de una cuerda de longitud $2l$, dieron el valor ω [1]). Hállese la tensión de la cuerda.

[1]) $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, donde T es el período de las oscilaciones. En lo sucesivo, si no se especifica, ω se denominará frecuencia de las oscilaciones.

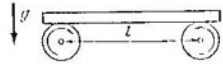
3.2.11. Hállense las frecuencias de las pequeñas oscilaciones de los sistemas descritos en los problemas 3.1.7 y 3.1.9*.

3.2.12. a) Determínese el tiempo que necesitará una piedra para pasar de una parte de la Tierra a la otra por un túnel recto que atraviesa su centro. Considérese la densidad de la Tierra constante y su radio igual a 6400 km. Menospréciese la rotación de la Tierra.

b) A través de la Tierra se practica un túnel recto que no pasa por el centro de la Tierra. Determínese el tiempo de movimiento de un tren con los motores desconectados por semejante túnel, si no hay fricción. Menospréciese la rotación de la Tierra.



Para el problema 3.2.12.



Para el problema 3.2.13.

3.2.13. Una tabla de masa m descansa en dos rodillos que giran a gran velocidad uno al encuentro del otro. La distancia entre los ejes de los rodillos es l y el coeficiente de fricción al deslizarse la tabla por el rodillo es μ. Hállese la frecuencia de las oscilaciones.

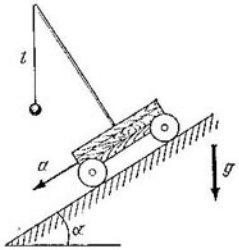
3.2.14*. Una carretilla rueda con aceleración a por un plano inclinado que forma con la horizontal el ángulo α. Hállese el período de las pequeñas oscilaciones del péndulo de longitud l instalado en la carretilla.

3.2.15*. Una nave cósmica gira alrededor de su eje a la velocidad angular ω. ¿Qué dependencia existe entre el período de las oscilaciones pequeñas del péndulo de longitud l y la distancia R del punto de suspensión hasta el eje de rotación, si el plano de oscilaciones pasa por el eje de rotación? ¿Si el plano de oscilaciones es perpendicular al eje?

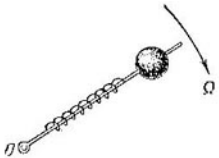
3.2.16. Una bola de masa m gira a la velocidad angular Ω alrededor de un eje, con el que se une mediante un muelle de rigidez k. Determínese la frecuencia de las oscilaciones pequeñas de la bola a lo largo del muelle si $\Omega^2 < k/m$.

3.2.17. Un manguito de masa m está insertado en una aguja horizontal lisa. Hacia aquél se ata un hilo que descansa sobre una polea. Al otro cabo del hilo se amarra una carga de masa M. ¿Por qué para las oscilaciones pequeñas del manguito puede menospreciarse la variación de la tensión del hilo a causa de las vibraciones verticales de la carga? ¿Qué frecuencia tendrán las oscilaciones de la carga?

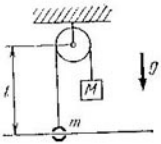
3.2.18*. Un globo inflado de aire al chocar débilmente contra la pared, se deforma de la manera mostrada en la figura. En este



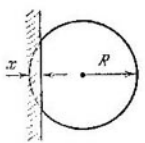
Para el problema 3.2.14*.



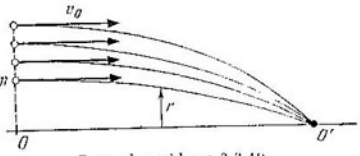
Para el problema 3.2.16.



Para el problema 3.2.17.

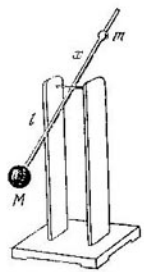


Para el problema 3.2.18*



Para el problema 3.2.19.

Para el problema 3.2.20



Para el problema 3.2.21.

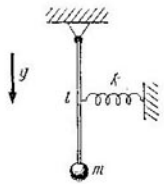
caso x es mucho menor que el radio del globo R. Puede considerarse que la presión excesiva ΔP del aire en el globo no cambia durante la colisión. Menospreciando la elasticidad de la envoltura, estímese el tiempo de colisión contra la pared. La masa del globo es m.

3.2.19. Las fuerzas, que actúan sobre las partículas, están dirigidas hacia cierto eje OO' y son proporcionales a la distancia hasta él: $F = -kr$. Las velocidades v_0 del haz de partículas de masa m en la sección O son paralelas al eje. Demuéstrese que las partículas se reunirán (se enfocarán) en puntos determinados del eje.

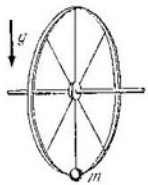
3.2.20. De un punto, yacente en la generatriz inferior de una canaleta cilíndrica horizontal de radio R, se desplaza a la velocidad v_0 una bola pequeña, formando un ángulo pequeño respecto a la generatriz. ¿Cuántas veces pasará por la generatriz inferior de la canaleta en la longitud l?

3.2.21. Un metrónomo no es otra cosa que una barra ligera, en cuyo extremo inferior se encuentra cierta masa M distando l del eje. Más arriba del eje en aquélla puede fijarse una carga pequeña móvil m a diferentes distancias x del eje, eligiendo de esta manera la frecuencia necesaria de las oscilaciones. Considerando las masas puntiformes, hállese de qué manera la frecuencia depende de x.

3.2.22. ¿Cómo cambiará la frecuencia de las oscilaciones pequeñas del péndulo en forma de una carga suspendida en una barra ligera, si en el centro de la barra se fija un muelle horizontal de rigidez k? En la figura viene representado el estado de equilibrio.



Para el problema 3.2.22.

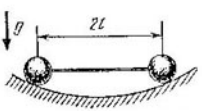


Para el problema 3.2.23.

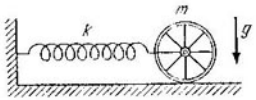
3.2.23. Hacia una rueda de radio R, con el eje situado horizontalmente, fijaron en la llanta una carga pequeña de masa m. Hállese la masa de la rueda suponiendo que está distribuida homogéneamente por la llanta, si la frecuencia de las oscilaciones pequeñas de la rueda alrededor del eje es igual a ω.

3.2.24. En un hoyo esférico de radio R se encuentran dos masas puntiformes, unidas por una varilla imponderable de longitud $2l$. Determínese la frecuencia de las oscilaciones pequeñas del sistema al moverse en el plano de la figura y al moverse perpendicularmente a este plano. No existe fricción.

3.2.25. Un resorte de rigidez k se une al eje de una rueda de masa m que puede rodar sin deslizamiento. ¿Cuál será la frecuencia de las oscilaciones del sistema? La masa de la rueda está distribuida homogéneamente por la llanta.



Para el problema 3.2.24.

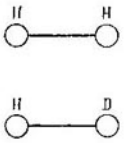


Para el problema 3.2.25.

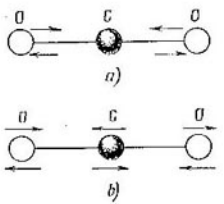
3.2.26*. Hállese la frecuencia de las oscilaciones del sistema descrito en el problema 3.1.6 en ausencia del deslizamiento. El momento de inercia de la esfera con relación al eje que pasa por el centro, es igual a $^2/_5\, mr^2$.

3.2.27. Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 se unen mediante cierto muelle de rigidez k. ¿Cuál será la frecuencia de las oscilaciones libres de semejante sistema?

3.2.28. ¿Qué relación existe entre las frecuencias de las oscilaciones de las moléculas H_2 y HD (D es el átomo de deuterio)?



Para el problema 3.2.28.



Para el problema 3.2.29*.

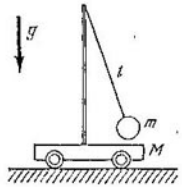
3.2.29*. Son posibles dos tipos de oscilaciones lineales de la molécula del gas carbónico: a) los núcleos de oxígeno se mueven en sentido opuesto y el núcleo de carbono permanece en el sitio; b) los núcleos de oxígeno se mueven a velocidades iguales en sentido contrario a la dirección del movimiento del núcleo de carbono. Determínese la relación de las frecuencias de estas oscilaciones.

3.2.30. En una superficie horizontal lisa se halla una carretilla de masa M con el péndulo matemático de longitud l y masa m, instalado en ella. Búsquese el período de las oscilaciones pequeñas del sistema.

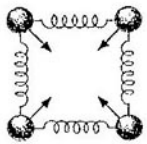
3.2.31. Cuatro masas iguales m se unen por muelles idénticos de rigidez k. A las cuatro masas les comunicaron simultáneamente velo-

cidades iguales, dirigidas hacia el centro del cuadrado. ¿Dentro de cuánto tiempo después de eso los muelles resultarán: a) comprimidos hasta el máximo; b) extendidos hasta el máximo?

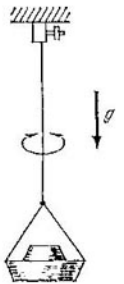
3.2.32. El momento de fuerzas que surge al retorcer un alambre, es proporcional al ángulo de torsión. Al alambre sujetaron un pla-



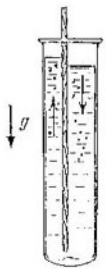
Para el problema 3.2.30.



Para el problema 3.2.31.



Para el problema 3.2.32.



Para el problema 3.2.34*.

tillo con el momento de inercia conocido I_0 con respecto al eje de torsión del alambre. ¿Cuál será el momento de inercia de la carga en el platillo con relación a ese mismo eje, si después de sujetarla al platillo el período de las oscilaciones de torsión cambió desde T_0 hasta T?

3.2.33. Hállese el período de oscilaciones del líquido en un recipiente en U de sección constante. La longitud general de la parte del recipiente, ocupada por el líquido, es igual a l.

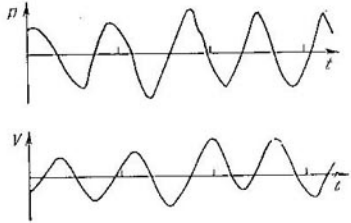
3.2.34*. Un tabique vertical en un recipiente alto lo divide en dos partes comunicantes con diferentes secciones. Hállese el período de las oscilaciones pequeñas del líquido, considerando que la superficie libre del líquido en cada parte permanece horizontal. La profundidad inicial del líquido es H.

3.2.35. Determínese la frecuencia de las pequeñas oscilaciones verticales de un areómetro cilíndrico largo sumergido en estado de equilibrio en el líquido a una profundidad H. El líquido se echa en un vaso cilíndrico estrecho (el radio del vaso es mucho menor que H).

3.2.36. Después de cargar un transatlántico, el período de sus oscilaciones pequeñas en sentido vertical cambia desde 7 hasta 7,5 s. ¿Cuál es la masa total de la carga? La sección según la línea de flotación en carga $S = 500$ m^2.

§ 3.3. Movimiento armónico

3.3.1*. En la figura se adjuntan las gráficas de la dependencia de la presión y volumen del aire en los pulmones en relación al tiempo. La lectura se lleva partiendo de los valores medios. En una buena aproximación las dos dependencias pueden considerarse armónicas. Determínese el desfasaje.



Para el problema 3.3.1*.

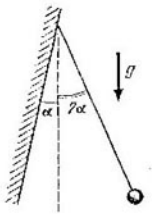
3.3.2. Un cuerpo de masa m, sujeto a un resorte, oscila libremente. La coordenada del cuerpo depende del tiempo según la ley $A \cos \omega t$. ¿Cómo cambian con el tiempo la velocidad y la aceleración? ¿Cuál es la rigidez del resorte?

3.3.3. La amplitud de las oscilaciones del péndulo matemático es de 5 mm, la longitud de su hilo es de 1 m. ¿Cómo depende el desplazamiento de la bola del péndulo con relación al tiempo? A título de origen de lectura del tiempo tómese: a) el instante de pasar la posición inferior de izquierda a derecha; b) el instante de pasar la posición derecha extrema.

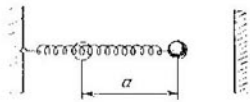
3.3.4. Una carga, que oscila libremente en un resorte, se desplaza durante el tiempo de 0,01 s desde la distancia de 0,5 cm con respecto a la posición de equilibrio hasta la máxima, igual a 1 cm. ¿Cuál es el período de las oscilaciones?

3.3.5. La frecuencia de las vibraciones libres de un oscilador es ω. ¿Dentro de cuánto tiempo mínimo la energía cinética del oscilador disminuirá desde el valor máximo hasta la mitad de éste?

3.3.6. Un péndulo de longitud l está suspendido en una pared inclinada. El péndulo se desvía de la vertical a un ángulo pequeño, dos veces mayor que el ángulo de inclinación de la pared hacia la vertical, y se deja libre. Hállese el período de las oscilaciones, si las colisiones contra la pared son absolutamente elásticas.



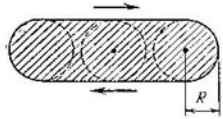
Para el problema 3.3.6.



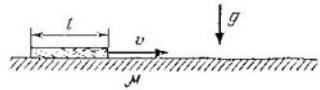
Para el problema 3.3.7.

3.3.7. Un extremo del resorte se fija a la pared, en el otro está sujeta una bola que oscila con la amplitud a y el período T_0. ¿A qué distancia de la posición de equilibrio es necesario poner una losa para que el período de oscilaciones se haga T en vez de T_0. Las colisiones contra la losa son absolutamente elásticas.

3.3.8*. Un tirador se esfuerza por dar en el disco de radio R que oscila de modo armónico con tanta rapidez que el tirador no puede seguirlo. Entonces dispara al centro de la zona del movimiento. ¿Con qué probabilidad el tirador dará en el disco, si la amplitud de las oscilaciones del centro l es mucho mayor que R? ¿Si $l = 2R$? ¿Aumentará la probabilidad de dar en el disco, si el tirador comienza a disparar al punto que está a una distancia R del extremo de la zona?



Para el problema 3.3.8*.



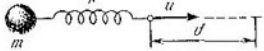
Para el problema 3.3.9.

3.3.9. Por un plano horizontal liso se desliza en sentido longitudinal una barra homogénea fina de longitud l. La velocidad de la barra es v. Ésta llega a un tramo extenso rugoso del plano con coeficiente de fricción μ. ¿Dentro de cuánto tiempo la viga se parará?

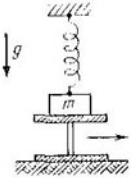
3.3.10. A uno de los extremos del resorte con rigidez k no deformado inicialmente se sujeta cierta carga de masa m, mientras que del otro extremo empiezan a tirar con una velocidad u a lo largo del resorte. A la distancia d de la posición inicial este extremo del

resorte de nuevo lo paran bruscamente. ¿En caso de qué velocidades u la carga una vez parada no oscilará?

3.3.11. Después de empujar dos péndulos idénticos con el punto de suspensión común éstos adquieren velocidades iguales, pero uno de ellos con cierto tiempo de retraso τ. ¿Cuándo se encontrarán los péndulos, si el período de sus oscilaciones es T?



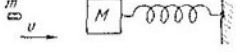
Para el problema 3.3.10.



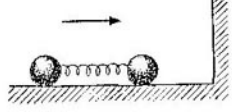
Para el problema 3.3.12.

3.3.12. Un cuerpo de masa m, suspendido en un muelle de rigidez k, descansa en un soporte. Este último se retira con rapidez. Descríbase el movimiento del cuerpo después de ello si inicialmente el muelle estaba: a) no deformado; b) comprimido en l

3.3.13. Una bala de masa m que vuela a la velocidad v da en el cuerpo de masa M, unido con la pared mediante el resorte con rigidez k, y se atranca en el cuerpo. Tomando como punto de referencia del tiempo el instante del impacto de la bala, hállese la dependencia de la velocidad y la coordenada del cuerpo con relación al tiempo.



Para el problema 3.3.13.



Para el problema 3.3.14.

3.3.14. Por un plano horizontal se deslizan a la velocidad v dos bolas de masas iguales m, unidas mediante un muelle no deformado de rigidez k. Las bolas chocan contra una pared elástica vertical. Descríbase el movimiento de las bolas en lo sucesivo. ¿Tendrá lugar otra colisión más contra la pared?

3.3.15. Una fuerza constante F empezó a actuar a lo largo de un muelle sobre un cuerpo, unido por este muelle con la pared y que permanecía en equilibrio. ¿Cuál será la tensión máxima del muelle y dentro de cuánto tiempo después de aplicar la fuerza F se alcanzará

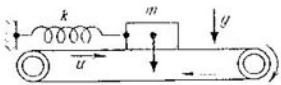
dicha tensión? El período de oscilaciones libres del cuerpo en el muelle es T.

3.3.16*. En el instante de tiempo t_0 la coordenada de un oscilador es x_0 y la velocidad v_0. Demuéstrese que la dependencia entre su coordenada y el tiempo en caso de oscilaciones libres puede representarse así

$$x = x_0 \cos \omega (t - t_0) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega (t - t_0).$$

3.3.17. Un cuerpo de masa m oscila en un muelle de rigidez k según la ley $x = A_0 \cos \omega t$. Comenzando desde el instante de tiempo t_0, sobre él empieza a actuar una fuerza constante F a lo largo del muelle. Determínese la amplitud de las oscilaciones con relación a la nueva posición de equilibrio. ¿Qué t_0 debemos elegir para que esta amplitud sea la máxima y la mínima?

3.3.18*. Sobre la cinta horizontal del transportador, que se mueve a la velocidad u, se encuentra una carga de masa m, unida con la



Para el problema 3.3.18*.

pared inmóvil mediante un resorte de rigidez k. El coeficiente de fricción entre la carga y la cinta es μ. Supongamos que en el instante inicial el resorte no está deformado y la carga se mueve junto con la cinta. Determínese la amplitud de las oscilaciones que surgirán.

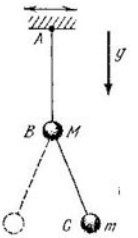
3.3.19*. Supongamos que en el planteamiento del problema 3.3.18* la velocidad inicial de la carga es nula. ¿A qué velocidad u de la cinta el movimiento desde el principio será armónico? Hállese la amplitud de las oscilaciones estacionarias.

3.3.20*. Sobre un plano horizontal yace cierto cuerpo de masa m, unido con una pared inmóvil mediante un muelle de rigidez k. El cuerpo se separa a una distancia l de la posición de equilibrio y se deja libre. Después de n oscilaciones el cuerpo se para. ¿Cuál será el coeficiente de fricción entre el cuerpo y el plano, si después de pararse, el muelle resultó no deformado?

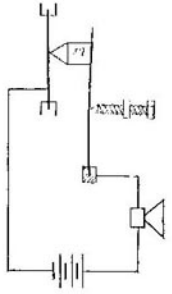
3.3.21. El péndulo BC con la bola de masa m está suspendido del péndulo AB con la bola de masa M. El punto A efectúa oscilaciones armónicas por la horizontal con la frecuencia ω. Hállese la longitud del hilo BC si se sabe que el hilo AB permanece todo el tiempo en posición vertical.

3.3.22. Un cuerpo de masa m oscila siguiendo la ley $x = A \times \cos(\omega t + \varphi)$. Búsquese la dependencia entre la fuerza, que actúa sobre el cuerpo, y el tiempo. ¿Cuál será el valor máximo de la fuerza? ¿En qué instantes el módulo de la fuerza pasa el valor máximo?

3.3.23. Una membrana horizontal efectúa oscilaciones armónicas en dirección vertical con una frecuencia ω y amplitud A. Sobre la membrana descansa una carga pequeña. ¿Bajo qué condición la carga vibrará junto con la membrana y bajo qué condición, empezará a saltar? ¿En qué posición de la membrana, por abajo o por encima de la posición media, transcurrirá la separación?



Para el problema 3.3.21.



Para el problema 3.3.24.

3.3.24. Para medir las amplitudes pequeñas de las oscilaciones de la membrana, que efectúa oscilaciones armónicas de alta frecuencia ω, se utiliza un «martillito». El martillito de masa m se aprieta a la membrana con una fuerza F, que se regula mediante un tornillo micrométrico. Cuando el contacto entre el martillito y la membrana se interrumpe, también se interrumpe la corriente en el circuito y en el teléfono se oye un tintineo. Determínese la amplitud de oscilaciones si el tintineo empezó precisamente con el valor de la fuerza F.

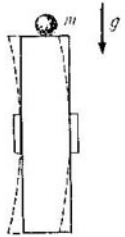
3.3.25. Una carga descansa sobre una losa horizontal. Ésta comienza a moverse en sentido vertical a la frecuencia ω y amplitud A, $A\omega^2 > g$. ¿A qué altura respecto a la posición inicial saltará la carga después de separarse?

3.3.26*. ¿Con qué amplitud debe oscilar la losa (véase el problema 3.3.25) para que surja una resonancia peculiar: la carga, lanzada por la losa, después de cada colisión aumente la altura de su elevación? Las colisiones se consideran absolutamente elásticas.

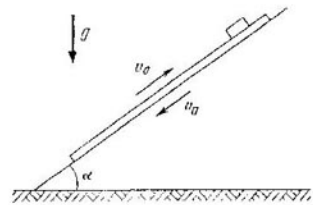
3.3.27*. Una placa de cuarzo piezoeléctrico oscila con la amplitud $A = 10^{-6}$ cm y frecuencia $\omega = 10^7$ s^{-1}. Pongamos un cuerpo de masa, comparable con la de la placa, sobre el extremo frontal de la placa. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y la placa es $\mu = 1$. Estímese en caso de qué amplitudes la presencia de este cuerpo influye notoriamente sobre la frecuencia de las oscilaciones de la placa.

3.3.28. La superficie de los cuerpos que vibran con frecuencia ultrasonora aparenta ser resbaladiza al tacto, mientras que los cuerpos colocados sobre dicha superficie, como si dijéramos, «flotan» por ella al menor esfuerzo. Explíquese eso.

3.3.29*. En el planteamiento del problema 3.3.27 estímese la velocidad máxima del cuerpo de masa m en régimen oscilatorio



Para el problema 3.3.27.



Para el problema 3.3.30*.

estacionario. Para ello es necesario llegar a comprender cuál es el carácter del movimiento estacionario de dicho cuerpo.

3.3.30*. Un plano inclinado vibra armónicamente con gran frecuencia a lo largo de su superficie. ¿Cuál será el movimiento estacionario del cuerpo sobre él? ¿Cuál será su velocidad media durante un tiempo largo si $\operatorname{tg}\alpha \ll \mu$ (α es el ángulo de inclinación del plano hacia el horizonte y μ, el coeficiente de fricción entre el cuerpo y el plano)? La amplitud de la velocidad del plano inclinado es v_0.

§ 3.4. Adición de las oscilaciones

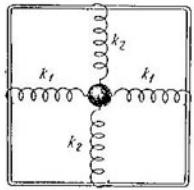
3.4.1. Unos extremos de los muelles pueden deslizarse sin fricción por un marco inmóvil, los otros extremos están sujetos a un cuerpo de masa m. ¿Qué carácter tiene el movimiento del cuerpo para el caso general? Sea $k_1 \neq k_2$. Entonces, ¿qué movimientos rectilíneos son posibles y de qué manera originarlos? Sobre el cuerpo después de excitar las oscilaciones actúan solamente las fuerzas de los muelles.

3.4.2. Supongamos que en el planteamiento del problema 3.4.1 $k_1 = k_2 = k/2$. Cerciórese de que en el plano del marco pueden haber oscilaciones rectilíneas de cualquier dirección. ¿Cómo hay que excitar las oscilaciones para que el movimiento transcurra describiendo una circunferencia? Demuéstrese que, para todo procedimiento de excitación, la trayectoria del movimiento es cerrada y hállese el tiempo completo de una revolución.

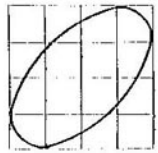
3.4.3. El movimiento del rayo del oscilógrafo por la pantalla transcurre siguiendo la ley

$$x = A \cos(\omega t - \varphi), \quad y = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Para comodidad de las mediciones ante la pantalla se coloca una red cuadrada. Haciendo uso de la figura, determínese el desfasaje.



Para el problema 3.4.1.



Para el problema 3.4.3.

3.4.4*. En el planteamiento del problema 3.4.3 determínese en caso de qué desfasaje en la pantalla aparece un segmento; una circunferencia. Durante el tiempo $2\pi/\omega$ la traza del haz en la pantalla no tiene tiempo para apagarse. Demuéstrese que en caso de φ constante y arbitrario, la traza del haz en la pantalla es de por sí una elipse con semiejes yacentes en las diagonales del cuadrado. Hállense esos semiejes.

3.4.5. Al estudiar las vibraciones armónicas del oscilador, la señal, proporcional a su desplazamiento, se suministra a las placas x del oscilógrafo y la señal, proporcional a la velocidad, a las placas y. ¿Qué cuadro veremos en la pantalla?

3.4.6. La desviación del haz del oscilógrafo es

$$x = A \cos(\omega - \Omega/2)t, \quad y = A \cos(\omega + \Omega/2)t,$$

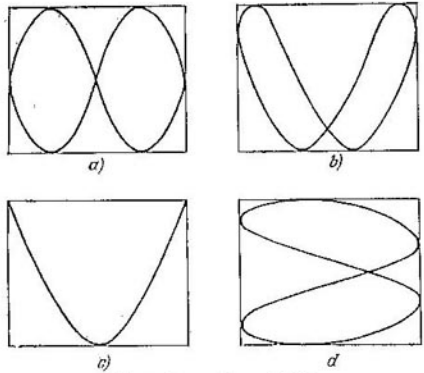
donde Ω es mucho menor que ω, con la particularidad de que la traza del haz en la pantalla se apaga en una fracción pequeña de tiempo $2\pi/\Omega$. ¿Qué cuadro veremos en la pantalla del oscilógrafo?

3.4.7. A las placas x e y del oscilógrafo se aplican señales armónicas y en la pantalla aparecen las imágenes mostradas en la figura. ¿En qué relación están los períodos de oscilaciones respecto a x e y en los casos a) — d)?

3.4.8. Un punto que oscila armónicamente por x e y, describe líneas que se llaman figuras de Lissajous. Demuéstrese que si las frecuencias están relacionadas como números enteros, dichas figuras son curvas cerradas. ¿Qué forma tendrán estas curvas si las frecuencias son iguales?

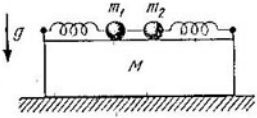
3.4.9. Demuéstrese que si la amplitud de las oscilaciones respecto a x es igual a A y respecto a y, B, la figura de Lissajous se inscribe en un rectángulo con lados $2A$ en la dirección x y $2B$ en la y. Sea

que la figura roza los lados horizontales de dicho rectángulo en los puntos p y los lados verticales, en los puntos q. ¿En qué relación se encuentran las frecuencias?

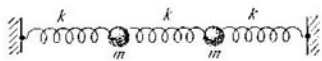


Para el problema 3.4.7.

3.4.10*. Dos bolas de masas m_1 y m_2 pueden vibrar en muelles iguales, deslizándose por una barra de masa M sin fricción. La raíz de la relación m_1/m_2 no es igual a una fracción simple. La barra yace sobre un plano horizontal. Las bolas se unen con un hilo, cuya tensión es T. El hilo se quema. ¿En caso de qué coeficiente mínimo de fricción μ entre el plano y la barra ésta permanecerá en el sitio?



Para el problema 3.4.10*.



Para el problema 4.3.14.

3.4.11*. Los extremos de un muelle con rigidez k se desplazan en sentido longitudinal según la ley armónica:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2);$$

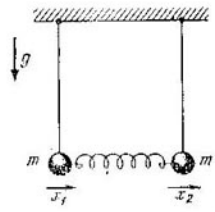
en este caso la tensión media del muelle es nula. ¿Cómo cambia la tensión con el tiempo? Determínense las energías media y máxima

del muelle. ¿Para qué diferencia de fases la energía media resulta ser la máxima y la mínima?

3.4.12*. Supongamos que los extremos del muelle (véase el problema 3.4.11*) oscilan con diferente frecuencia:

$$x_1 = A \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A \cos \omega_2 t.$$

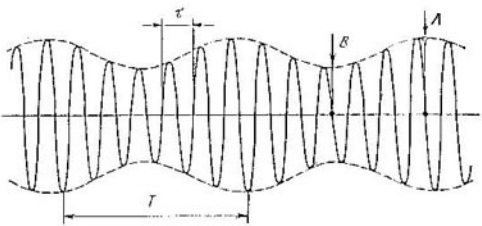
¿Cómo varía en este caso la tensión del muelle con el tiempo? Para las frecuencias próximas trácese la gráfica de la dependencia entre la tensión y el tiempo. ¿Por qué en este caso se habla de batimientos? Determínese la energía media del muelle durante largo tiempo en caso de que amplitudes y frecuencias sean desiguales.



Para el problema 3.4.15*.

3.4.13. Una partícula vibra según la ley $x = A \cos(\omega t - \varphi)$ en presencia de la fuerza $F = F_0 \cos \omega t$. ¿Cuál será la potencia media de dicha fuerza?

3.4.14. Las oscilaciones libres de sistemas complejos pueden representarse como la adición (superposición) de varias oscilaciones armónicas de diferentes frecuencias. Analícese, por ejemplo, el sistema dado en la figura. Demuéstrese que aquí pueden haber dos tipos de oscilaciones armónicas lineales: a) cuando las masas se mueven con la misma amplitud hacia una misma dirección; b) cuando las masas se mueven con la misma amplitud una al encuentro



Para el problema 3.4.16.

de la otra. Hállense las frecuencias de estas oscilaciones si la rigidez de los muelles es k.

3.4.15*. Las oscilaciones pequeñas de los péndulos unidos mediante un muelle, transcurren según la ley

$$x_1 = b \cos(\omega_0 t + \varphi) + a \cos \omega t,$$
$$x_2 = b \cos(\omega_0 t + \varphi) - a \cos \omega t,$$

donde las frecuencias ω_0 y ω son conocidas. Determínese la rigidez del muelle que une los péndulos. En posición de equilibrio los péndulos se encuentran en posición vertical y la masa de cada bola es m.

3.4.16. En la figura se muestra la dependencia entre la coordenada y el tiempo para el movimiento que representa la adición de dos oscilaciones armónicas. Determínense, haciendo uso de esa dependencia, las amplitudes y las frecuencias de las mencionadas oscilaciones.

§ 3.5. Oscilaciones forzadas y amortiguadas

3.5.1. Su amiga está sentada en un columpio. Usted lo balancea con impulsos de duración corta. ¿Cómo hay que hacerlo para que el movimiento pendular transcurra con mayor éxito?

3.5.2. Un oscilador de masa m se somete a golpes breves, durante cada uno de ellos se le transmite el impulso p. Supongamos que no hay amortiguamiento y que el oscilador se encontraba inicialmente en reposo. Descríbase el movimiento si los golpes se efectúan pasado el tiempo T_0, $T_0/2$ (T_0 es el período de las oscilaciones libres).

3.5.3*. En el planteamiento del problema 3.5.2 el oscilador poseía la velocidad v_0 y coordenada x_0 en el instante nulo. ¿Cuál será la amplitud de las oscilaciones después de n golpes, si el primero tuvo lugar en el instante nulo? Constrúyase el diagrama de fases.

3.5.4. Una tabla flexible larga está tendida a través de un río. Cuando un niño estaba en ella sin moverse, ésta se combaba en 0,1 m. Pero cuando el muchacho empezó a caminar con la velocidad de 3,6 km/h, la tabla comenzó a balancearse de tal manera que él se cayó al agua. ¿De qué longitud es el paso del niño?

3.5.5. Los camiones entran en un silo de grano, dejan la carga y salen de allí con la misma velocidad. Por una parte del silo los baches en la carretera son más frecuentes que por la otra. ¿Cómo ateniéndose al perfil de la carretera se puede determinar dónde se encuentra la entrada y dónde la salida?

3.5.6. Una lancha motora empezó a balancearse fuertemente aunque las olas en la mar eran no muy grandes. El capitán cambió el rumbo y la velocidad. Los golpes de las olas comenzaron a ser dos veces más frecuentes, pero a pesar de ello la amplitud de las oscilaciones de la lancha motora disminuyó considerablemente. Explíquese este hecho.

3.5.7. Parecería que disparando de un tiragomas contra un puente al compás de sus oscilaciones propias, después de realizar gran cantidad de disparos se podría lograr balancearlo intensamente. Sin embargo, es poco probable que lo consiga. ¿Por qué?

3.5.8. La resistencia de un medio líquido o gaseoso, siendo pequeñas las velocidades del movimiento, es proporcional a la velocidad de un cuerpo en su seno y tiene dirección contraria a ella: $f = -bv$. ¿Cómo depende la potencia disipada respecto de la velocidad?

3.5.9*. Sea la energía cinética de un oscilador $K = mv^2/2$ y la potencial $U = kx^2/2$. Muéstrese que la existencia de las «pérdidas» de la potencia $N_p = bv^2$ equivale a la presencia de una fuerza complementaria $f = -bv$.

3.5.10. Partiendo del balance de energía, descríbase cualitativamente el movimiento de un oscilador, en caso de que la resistencia es proporcional a la velocidad, bajo la influencia de un golpe unitario y durante golpes iguales que suceden cada período. Al principio el oscilador estaba en reposo.

3.5.11*. En presencia de la fuerza de «fricción» $f = -bv$ un sistema oscilatorio se denomina oscilador con amortiguamiento, y sus vibraciones en ausencia de la fuerza motriz, oscilaciones amortiguadas. Demuéstrese que las ecuaciones de movimiento de dos osciladores con $k_1/m_1 = k_2/m_2 = \omega_0^2$ y $b_1/m_1 = b_2/m_2 = 2\gamma$ tienen las mismas soluciones siendo las coordenadas y velocidades iniciales iguales (ω_0 es la frecuencia de oscilaciones libres sin fricción; γ, el coeficiente de amortiguamiento; k_1 y k_2, rigideces y m_1 y m_2, las masas de los osciladores).

3.5.12. Muéstrese que si tienen lugar vibraciones amortiguadas del oscilador con $x = x_1(t)$ y $v = v_1(t)$, las vibraciones de un oscilador idéntico con condiciones iniciales $x(0) = nx_1(0)$ y $v(0) = nv_1(0)$ transcurren según la ley $x = nx_1(t)$, $v = nv_1(t)$.

3.5.13. El amortiguamiento puede ser tan grande que el movimiento del oscilador deja de tener carácter vibratorio. Estímese según el orden de la magnitud, para qué relación entre γ y ω_0 eso ocurrirá.

3.5.14. Supongamos que el amortiguamiento es suficientemente débil de manera que el oscilador, al salir de la posición nula con una proyección positiva de la velocidad, pasado cierto tiempo finito T de nuevo transita por la posición nula con una proyección positiva de la velocidad, pero n veces inferior a la inicial. ¿Qué puede decirse sobre la velocidad al pasar un tiempo igual a $2T$ y $3T$?

3.5.15. Al cabo de un tiempo τ_2 la amplitud de las oscilaciones amortiguadas se redujo a la mitad. ¿Cómo cambió durante este mismo tiempo la energía mecánica del oscilador? ¿Dentro de cuánto tiempo la energía disminuirá a la mitad?

3.5.16. A las placas horizontales del osciló grafo se suministra una señal, proporcional al desplazamiento de un oscilador con amortiguación, mientras que a las verticales, una señal, proporcional a la velocidad. Represéntese cualitativamente la traza del haz en la pantalla para un amortiguamiento débil.

3.5.17*. La expresión exacta para la coordenada del oscilador, al perturbar el equilibrio de éste mediante un impulso, tiene la forma

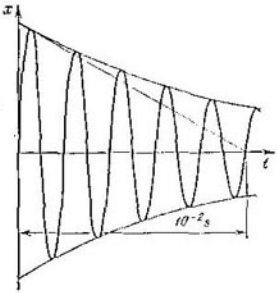
$$x = \frac{1_0}{\omega} \exp(-\gamma t), \text{ donde}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \gamma < \omega_0,$$

aquí v_0 es la velocidad inicial. Muéstrese que entonces a cualesquiera condiciones iniciales la solución puede escribirse como

$$x = A \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \varphi).$$

3.5.18. Haciendo uso del cuadro de la dependencia entre x y t, obtenido en la pantalla del osciló grafo, determínense γ, ω y ω_0. ¿Por qué cuando $\gamma \ll \omega_0$ en calidad de ω se toma ω_0?



Para el problema 3.5.18.

3.5.19. a) Dos elongaciones máximas que siguen una tras otra hacia la izquierda de un péndulo de segundo difieren en una centésima. ¿Qué coeficiente de amortiguamiento γ tiene este péndulo?

b) La bola de dicho péndulo se sustituye por una bola del mismo radio, pero con una masa que supera cuatro veces la anterior. ¿Cómo influirá eso sobre el amortiguamiento de las oscilaciones?

3.5.20*. a) Se denomina factor de calidad Q del oscilador la relación entre su energía inicial y la pérdida de la energía durante la variación de la fase en 1 rad. Exprésese el factor de calidad Q mediante γ y ω_0 ($\gamma \ll \omega_0$). ¿Cómo está relacionado Q con la cantidad de oscilaciones, durante las cuales la energía disminuye e veces?

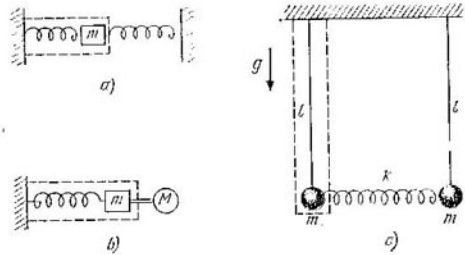
b) Para las oscilaciones de los monocristales de zafiro a baja temperatura y la suspensión correspondiente en el vacío el factor de calidad Q es igual a $10^8 \ldots 10^9$. La frecuencia de las oscilaciones del monocristal $\omega_0 = 10^4\ s^{-1}$. Estímese en cuánto variará la amplitud de las oscilaciones durante un día entero?

3.5.21*. Cada vez en que la desviación del oscilador es nula y la proyección de la velocidad es positiva, a él se le comunica mediante un golpe un impulso complementario p. ¿Cuál será el movimiento del oscilador y qué velocidad máxima se establecerá al fin y al cabo? Las características del oscilador son conocidas. Examínense los dos casos límites: $2\pi\gamma/\omega \gg 1$ y $2\pi\gamma/\omega \ll 1$.

3.5.22. Cítese un ejemplo de un sistema en el que la influencia por una de sus partes sobre la otra se describe mediante una fuerza que varía armónicamente con el tiempo.

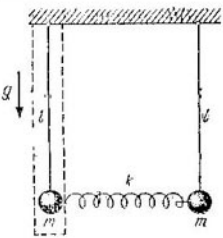
3.5.23. Sobre una partícula de masa m actúa cierta fuerza $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, en la presencia de la cual la partícula oscila alrededor de la posición nula. Imagínese que esta fuerza la desarrolla un muelle, sujeto por el otro extremo a una pared inmóvil, y hállese, haciendo uso de ello, la amplitud de las oscilaciones de la partícula. Considérese que no hay amortiguamiento.

3.5.24*. En los sistemas, mostrados en la figura, transcurren oscilaciones libres sin fricción. Muéstrese que la fuerza que actúa sobre el oscilador, destacado por la línea de trazos, posee carácter armónico.



Para el problema 3.5.24*.

3.5.25. a) Un cuerpo de masa m, sujeto a dos muelles de rigideces k_1 y k_2, oscila libremente con frecuencia $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$. La fuerza con que ejerce el segundo muelle varía armónicamente con la misma frecuencia ω: $F = -k_2 x = F_0 \cos \omega t$. Si la sustituimos por una fuerza motriz $F_0 \cos \omega t$, el movimiento seguirá siendo el mismo. Así, pues, unas mismas oscilaciones pueden considerarse como libres y como forzadas. Utilizando eso y considerando que $k_1 = m\omega_0^2$, hállese la dependencia entre x y t y exprésese la amplitud de las oscilaciones forzadas mediante F_0, ω y ω_0.



Para el problema 3.5.26*.

b) ¿Qué masa adicional será necesario añadir al oscilador de masa m con frecuencia propia ω_0 y con qué amplitud deberá moverse después de eso para que la fuerza que ejerce sobre él la masa adicional sea igual a $F_0 \operatorname{sen} \omega t$? ¿Coincidirá esta amplitud con la de las oscilaciones forzadas de dicho oscilador bajo la acción de la fuerza motriz $F_0 \operatorname{sen} \omega t$?

3.5.26*. Si desviamos las pequeñas cargas de la misma manera hacia una parte y las dejamos libres, se excitarán oscilaciones con frecuencia $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Pero si las desviamos a distancias iguales pero en sentidos opuestos, surgirán oscilaciones con frecuencia $\omega_1 = \sqrt{g/l + 2k/m}$. En el caso general el movimiento de las cargas

es la adición de estas oscilaciones:

$$x_1 = B \cos(\omega_0 t + \varphi) + A \cos \omega t,$$
$$x_2 = B \cos(\omega_0 t + \varphi) - A \cos \omega t.$$

Examínese ahora la fuerza $F_0 \cos \omega t$, que actúa sobre la carga izquierda por parte del muelle, como fuerza motriz y determínese A por medio de F_0, m, ω_0 y ω. El sumando $B \cos(\omega_0 t + \varphi)$ es de por sí una oscilación libre del oscilador destacado. ¿Qué es lo que definen B y φ?

3.5.27*. El resultado del problema 3.5.26 es muy importante: en el caso general el movimiento del oscilador en presencia de una fuerza motriz es la adición de oscilaciones libres y forzadas. ¿Bajo qué condiciones iniciales tendrán lugar solamente oscilaciones forzadas?

3.5.28*. ¿Por qué para la dependencia lineal de la fuerza con respecto al desplazamiento y velocidad del oscilador el movimiento general es una adición de oscilaciones libres y forzadas?

3.5.29. Para las oscilaciones forzadas con frecuencia inferior a la propia del oscilador, las direcciones del desplazamiento y de la fuerza motriz coinciden, mientras que para la frecuencia superior a la propia, son contrarias. Explíquese el porqué. No hay amortiguamiento.

3.5.30. Siendo pequeñas las frecuencias de la fuerza motriz (en comparación con la frecuencia propia del oscilador) sus desplazamientos en caso de oscilaciones forzadas pueden considerarse iguales a $F(t)/k$, donde $F(t)$ es la fuerza motriz y k, la rigidez. Pero para las frecuencias grandes la aceleración del oscilador puede considerarse igual a $F(t)/m$, donde m es la masa del oscilador. Explíquense estos casos límites.

3.5.31*. En el instante nulo sobre un oscilador que está en reposo en posición de equilibrio empieza a actuar una fuerza motriz $F_0 \cos \omega t$. La masa del oscilador m y la frecuencia propia ω_0 son conocidas. Hállese la dependencia entre la coordenada del oscilador y el tiempo, asimismo trácese su gráfica para $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$. Al construir la gráfica, hágase uso de la identidad

$$\cos \alpha - \cos \beta \equiv 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

3.5.32*. La intensificación de las oscilaciones, como se ve de los resultados del problema 3.5.31*, va acompañada de batimientos. Cuando $\omega \to \omega_0$ la amplitud de los batimientos aumenta, pero sin embargo su período y, por consecuencia, el tiempo de incremento crecen ilimitadamente. Supongamos que el tiempo que pasó después de empezar a ejercer la fuerza motriz, es mucho menor que $2\pi/|\omega - \omega_0|$. Hágase uso de la aproximación $\operatorname{sen} \varepsilon \approx \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) y aclárese el carácter inicial de la intensificación de las oscilaciones.

3.5.33*. El carácter de la intensificación de las oscilaciones cuando $\omega = \omega_0$ puede aclararse pasando al límite $\omega \to \omega_0$. ¿Cómo se explica que la «amplitud» de las oscilaciones crece en este caso proporcionalmente al tiempo?

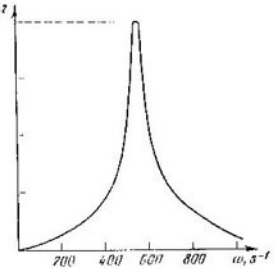
3.5.34*. Sea que existe un amortiguamiento débil: el factor de amortiguamiento $\gamma \ll \omega_0$. ¿Cómo influirá sobre la intensificación de las vibraciones de un oscilador que pasa del estado en reposo a la posición de equilibrio cuando $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ y $\omega \to \omega_0$? ¿Por qué aquí es oportuno hablar sobre el establecimiento de las oscilaciones forzadas? ¿Cuál es el tiempo característico de dicho establecimiento?

3.5.35. a) ¿Cuál debe ser la fuerza motriz para que un oscilador de masa m y con el factor de amortiguamiento γ realice oscilaciones armónicas $x = A \cos(\omega_0 t - \varphi)$ con la frecuencia propia ω_0?

b) La amplitud de la fuerza motriz es F_0 y su frecuencia $\omega = \omega_0$. Determínese la amplitud de las oscilaciones forzadas. ¿En cuántas veces ésta es mayor que la desviación del oscilador cuando actúa una fuerza constante F_0?

3.5.36. Un oscilador se mueve según la ley $x = x_0 \operatorname{sen} \omega t$ y la fuerza motriz es $F_0 \cos \omega t$. ¿Cuál será el factor de amortiguamiento del oscilador? La masa del oscilador es m.

3.5.37. En la figura viene expuesta la dependencia entre el cuadrado de la amplitud de la velocidad de las oscilaciones forzadas y la frecuencia de la fuerza motriz, cuya amplitud es constante. Determínese la frecuencia propia del oscilador, su factor de amortiguamiento y el factor de calidad.



Para el problema 3.5.37.

3.5.38. Si para detectar por resonancia las fuerzas motrices pequeñas se utiliza un monocristal de zafiro con factor de calidad $Q = 10^6$ y la frecuencia de oscilaciones propias $\omega_0 = 10^4\ s^{-1}$, entonces ¿cuánto tiempo (en orden de magnitud) es necesario esperar para que se establezcan las oscilaciones?

3.5.39. La aguja del fonocaptor puede moverse por el surco sinusoidal del disco fonográfico. Sea la frecuencia de las oscilaciones naturales de la aguja ω_0. ¿A qué velocidad de la aguja con respecto al disco ésta empezará a salirse del surco? Las curvaturas del surco se repiten a la distancia λ.

3.5.40*. Una fuente de partículas de masa m las emite con una velocidad inicial casi nula. Sobre ellas actúa una fuerza $F_0 \operatorname{sen} \omega t$. Determínese la velocidad de las partículas emitidas en el instante nulo, al pasar el tiempo t. ¿Cuál será la velocidad media de estas

partículas? ¿A qué distancia de la fuente se alcanzará la máxima velocidad? Contéstese a estas preguntas para las partículas, emitidas en los instantes π/ω, $\pi/2\omega$.

3.5.41*. Desde el instante nulo sobre una partícula de masa m comienza a actuar en dirección del eje x una fuerza $F_0 \operatorname{sen} \omega t$, en tanto que en dirección del eje y, la fuerza $F_0 \cos \omega t$. Hállese la trayectoria si en el instante inicial la partícula se encontraba en reposo. ¿Cuál será la velocidad media de la partícula durante un tiempo largo? ¿Qué velocidad inicial deberá tener la partícula para moverse por una circunferencia en presencia de dichas fuerzas? ¿Cuál será el radio de esta circunferencia?

§ 3.6. Deformaciones y tensiones. Velocidad de las ondas

3.6.1. Una cadena larga de bolas, unidas por muelles de rigidez k, se estira por un extremo con una fuerza F. El otro extremo de la cadena está sujeto. Determínese el alargamiento de los muelles y el desplazamiento de la N-ésima bola al establecerse el equilibrio.

3.6.2. Un alambre de 1 m de longitud se estira por los extremos en 0,1 mm. ¿Cómo cambiará la distancia entre los átomos «vecinos», si la distancia interatómica media en el material no deformado es igual a 10^{-10} m?

3.6.3. Se llama módulo de Young E de un material a la rigidez de un cubo unitario sometido a un esfuerzo que se aplica perpendicularmente a una de sus aristas. ¿Cuál será la rigidez de una barra de longitud L y sección S para las tracciones y compresiones longitudinales? Sea que la barra se fija de un extremo. ¿Con qué fuerza, aplicada al otro extremo, se le puede alargar en ΔL?

3.6.4. Estímese la rigidez del enlace interatómico en un material con el módulo de Young E y distancia interatómica media a.

3.6.5. En una barra de acero con sección de 1 cm^2 y longitud de 75 cm se sujetan tres cargas con la masa de 2 t cada una que distan 25 cm la una de la otra. La última carga está colgada en el extremo de la barra. El módulo de Young para el acero es de $2 \cdot 10^{11}$ Pa. ¿Cuál será el alargamiento de toda la barra?

3.6.6. Al tender los rieles de tranvía, éstos se sueldan en las uniones. ¿Qué tensiones aparecen en ellos al cambiar la temperatura desde -30 °C en invierno hasta $+30$ °C en verano, si el tendido se realizó a 10 °C? El coeficiente de dilatación lineal del acero $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}.

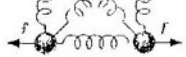
3.6.7. Las partes de la pared por diferentes lados de una rendija fueron unidas por una banda de acero en estado incandescente que al enfriarse hasta 0 °C, apretó esas partes una a la otra. La anchura de la rendija es de 1 cm, la longitud de la banda es de 2 m y su sección, de 2 cm^2. ¿Con qué fuerza resultarán apretadas las partes de la pared, si la banda inicialmente se caldeó hasta 500 °C?

3.6.8. La columna de la Catedral de San Isaak en Leningrado tiene una altura de 30 m. ¿En cuánto estará comprimida bajo la acción de su peso propio? La densidad del granito es de 2,7 g/cm^3 y el módulo de Young es de 10^{11} Pa.

3.6.9. El alargamiento relativo de una barra es ε. Hállese la energía de la deformación elástica por unidad de volumen, si el módulo de Young del material es E. Exprésese la magnitud obtenida por medio de la tensión normal σ.

3.6.10*. ¿Qué trabajo mínimo es necesario ejecutar para doblar una barra de longitud l y sección cuadrada $a \times a$ obteniendo un anillo? El módulo de Young del material es E y la longitud de la barra $l \gg a$.

Para el problema 3.6.5.



Para el problema 3.6.11*.

3.6.11*. Cuando actúan fuerzas longitudinales, se modifican no sólo las dimensiones longitudinales de un cuerpo elástico, sino también las transversales. Examínese una célula, donde los enlaces de los átomos se dan en forma de muelles. Las rigideces de los muelles diagonales son k_1 y las de los demás, k_0. Determínese la relación entre la compresión de los muelles transversales y la tracción de los longitudinales a pequeñas deformaciones.

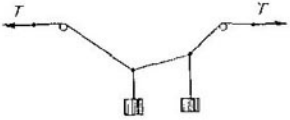
3.6.12. Por deformación se comprende la variación relativa de las dimensiones lineales. La relación entre la deformación transversal y la longitudinal es negativa y su valor absoluto se denomina coeficiente de Poisson μ. Para el acero $\mu = 0{,}3$. ¿Aumenta o disminuye el volumen de una barra de acero durante la tracción? Al estirar la goma, su volumen apenas cambia. Entonces, ¿cuál es en este caso μ?

3.6.13*. La compresibilidad de una substancia muestra en qué fracción disminuye el volumen de un cuerpo con respecto al volumen inicial, durante el incremento unitario de la presión sobre su superficie. Examinando la compresión por todos los lados de un cubo unitario, como la suma de tres simples, exprésese la compresibilidad mediante el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson μ.

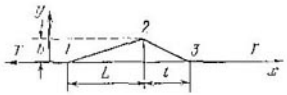
3.6.14. La compresibilidad del agua es de $5 \cdot 10^{-5}$ atm^{-1}. Estímese la variación de la profundidad del océano, si el agua se convirtiese en incompresible. La profundidad media del océano es de 3...4 km. En el océano se puede tropezar con profundidades de unos 10 km. ¿En cuánto la densidad del agua en esta profundidad es

mayor que en la superficie? ¿Cuánta energía elástica se almacena en la unidad de volumen del agua?

3.6.15. Un hilo imponderable descansa sobre dos clavos. La tensión en sus secciones horizontales es T. ¿De qué manera, ateniéndose al perfil del hilo, se pueden hallar las masas de las cargas y las fuerzas de reacción por parte de los clavos?



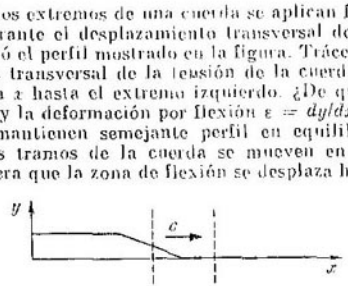
Para el problema 3.6.15.



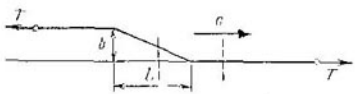
Para el problema 3.6.16.

3.6.16. A los extremos de una cuerda se aplican fuerzas longitudinales T. Durante el desplazamiento transversal de los tramos de la cuerda surgió el perfil mostrado en la figura. Trácese la gráfica de la componente transversal de la tensión de la cuerda F en función de la distancia x hasta el extremo izquierdo. ¿De qué manera está relacionada F y la deformación por flexión $\varepsilon = dy/dx$? ¿Qué fuerzas transversales mantienen semejante perfil en equilibrio?

3.6.17. Los tramos de la cuerda se mueven en sentido transversal de manera que la zona de flexión se desplaza hacia la derecha



Para el problema 3.6.17.



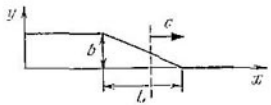
Para el problema 3.6.18.

a una velocidad c sin cambiar su inclinación. ¿Cómo se relacionan la deformación ε en la zona de flexión y la velocidad u de las partículas de la cuerda?

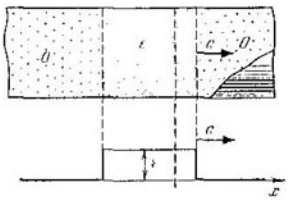
3.6.18. a) Explíquese por qué aumenta el impulso del tramo destacado de la cuerda. Determínense la velocidad de variación del impulso mediante la masa por unidad de longitud de la cuerda μ, la deformación en la zona de flexión es $b/L = \varepsilon \ll 1$ y la velocidad de desplazamiento de la zona de flexión es c.

b) ¿Cuál será la suma de las fuerzas que actúan sobre el tramo destacado si la tensión de la cuerda es igual a T? La velocidad de la variación del impulso es igual a esta suma de fuerzas. Exprésese de aquí c por medio de T y μ.

3.6.19. a) Haciendo uso de la gráfica de los desplazamientos longitudinales de los tramos de la barra con módulo de Young E, determínese la deformación y la energía elástica, perteneciente a la unidad de volumen, en la zona perturbada. Supongamos que la perturbación, conservando su forma, se desplaza hacia la derecha de la



Para el problema 3.6.19.



Para el problema 3.6.20.

barra a la velocidad c. ¿Cuál será la velocidad de las partículas en la zona perturbada?

b) En la perturbación móvil que conserva su forma la energía cinética es igual a la elástica. Partiendo de ello, determínense la velocidad de perturbación mediante el módulo de Young E y la densidad ρ del material de la barra.

3.6.20. a) La zona de la deformación longitudinal ε se desplaza por la barra a la velocidad c hacia la derecha. Sea el área de la sección de la barra S y la densidad del material ρ. ¿Cuál será la velocidad de variación del impulso a la derecha de la sección destacada?

b) El impulso, desplazado por unidad de tiempo a través de la unidad de área de la sección transversal, se llama densidad del flujo del impulso. ¿Por qué ésta debe ser igual a la tensión normal σ en esa sección? Expresando σ mediante la deformación, determínese de aquí c por medio de E y ρ.

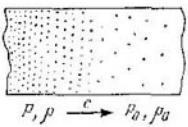
3.6.21. El módulo de Young para el acero es $2 \cdot 10^{11}$ Pa y la densidad, 7,8 g/cm^3. ¿Cuál será la velocidad de las ondas longitudinales para una barra de acero? En las hojas de acero la velocidad de las mencionadas ondas es mayor que en las barras finas. ¿Por qué?

3.6.22. Las compresibilidades del mercurio, agua y aire son respectivamente $3 \cdot 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-5}$ y 0,71 atm^{-1} y las densidades, 13,6, 1 y $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3. Determínense las velocidades del sonido en estos medios.

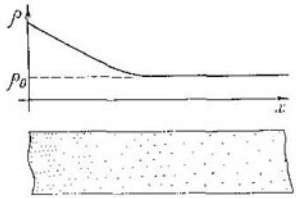
3.6.23. Por el gas se mueve una onda de choque si detrás del frente de la onda la presión P y la densidad ρ superan considerable-

mente la presión P_0 y la densidad ρ_0 del gas no perturbado. Hállese la velocidad de la onda de choque, haciendo uso de esos datos.

3.6.24*. En una perturbación móvil la densidad ρ del gas desciende suavemente hasta la densidad ρ_0 del gas no perturbado. La presión del gas $P \sim \rho^\gamma$ ($\gamma > 1$). Explíquese de qué manera de esta



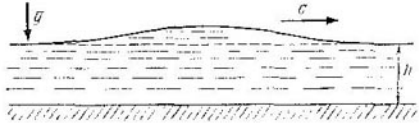
Para el problema 3.6.23.



Para el problema 3.6.24*.

perturbación se desarrolla una onda de choque de compresión. ¿Por qué no se originan ondas de choque de rarefacción?

3.6.25*. Determínese la velocidad de las «ondas en agua poco profunda». Así se denominan por lo general las perturbaciones del nivel de agua, cuya extensión es mucho mayor que la profundidad



Para el problema 3.6.25*.

del agua h. El cambio del nivel a causa de la perturbación es pequeño en comparación con h.

3.6.26*. Una onda sinusoidal longitudinal de frecuencia ω recorre una cadena de bolas de masa m, unidas mediante muelles de

Para el problema 3.6.26*.

longitud l y rigidez $k = m\omega_0^2$. En la figura los desplazamientos de las bolas se trazan por la vertical en escala aumentada. La amplitud

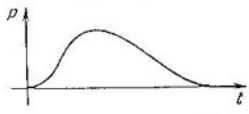
de los desplazamientos es mucho menor que l. Hállese la velocidad de propagación de dicha onda. Obténgase la velocidad de la onda en el límite de frecuencias bajas $\omega \ll \omega_0$. Estímese la frecuencia límite ω_0 para el hierro.

§ 3.7. Propagación de las ondas

3.7.1. El centro de una barra con sección S y densidad ρ se desplazó a la derecha a una distancia b después de que pasó una onda corta de compresión longitudinal. La velocidad de la onda es c. Determínese el impulso de esa onda.

3.7.2. a) En un medio elástico de densidad ρ se mueve a la velocidad c cierta onda plana de compactación $\Delta\rho$. ¿Cuál es la densidad del flujo del impulso en la zona de compresión?

b) La extensión de la capa del medio en dirección de la propagación de la onda es L y de la misma onda es l. ¿Con qué velocidad se mueve el centro de masas de esta capa? ¿En cuánto se desplazará éste cuando la onda atraviese toda la capa?



Para el problema 3.7.3.

3.7.3. En un tubo con gas se mueve cierta onda a velocidad c. Las indicaciones de un captador inmóvil de presión, al pasar la onda, es $P(t)$ (véase la figura). Hállese la distribución de la presión en función de la distancia hasta el captador en el instante t.

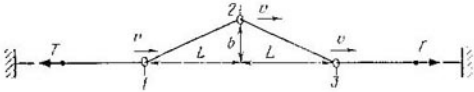
3.7.4. En una onda, que se mueve hacia la derecha a velocidad c, las velocidades de las partículas de la barra en el instante inicial dependen de la distancia x hasta el extremo izquierdo según la ley $u = u(x)$. Hállese la dependencia entre el tiempo y la densidad del flujo del impulso a la distancia x desde el extremo izquierdo.

3.7.5. El paso al agua que fluye por una tubería con la velocidad de 2 m/s se cierra con rapidez mediante una chapeleta rígida. Determínese la fuerza que actúa sobre la chapeleta al parar el agua, si la velocidad del sonido en el agua es de 1,4 km/s. La sección de la tubería es de 5 cm^2.

3.7.6. Una fuerza longitudinal F actúa durante un tiempo τ sobre el extremo de cierta barra semiinfinita en reposo. Hállense la velocidad y deformación en la onda, si la sección de la barra es S, el módulo de Young, E y la densidad es ρ. ¿Cuál será la densidad de la barra en la zona de perturbación? Hállense el impulso y la energía de la onda al cabo del tiempo de $0{,}5\,\tau$ y $1{,}5\,\tau$, desde que comenzó la acción de la fuerza.

3.7.7. Una cuerda se estira por los extremos mediante fuerzas longitudinales T. Ella consta de dos partes con densidades lineales μ_1 y μ_2. Por el lugar de su unión empiezan a tirar con una fuerza transversal F. ¿Cómo cambia con el tiempo la forma de la cuerda?

3.7.8. En una cuerda, cuya masa de la unidad de longitud es μ y la tensión es T, se ponen tres anillos lisos. Ellos se mueven a la velocidad v a lo largo de la cuerda; con la misma velocidad, sin cambiar su forma, se mueve el perfil, creado por los anillos. ¿Qué



Para el problema 3.7.8.

fuerzas obran por parte de los anillos sobre la cuerda? ¿Qué es lo que sucede al aproximarse v a $\sqrt{T/\mu}$?

3.7.9. La velocidad de las ondas de «flexión» de un neumático es de 160...200 km/h. ¿Qué ocurrirá al aproximarse la velocidad del automóvil a esta magnitud?

3.7.10. En su conferencia «Sobre las ondas de barco» lord Kelvin narraba: «...un descubrimiento fue en realidad hecho por un caballo que arrastraba diariamente una lancha por el canal entre Glasgow y Ardrossan. Una vez el caballo se asustó y desbocó a galope, en tanto que el cochero, siendo una persona observadora, vio que cuando el caballo alcanzó cierta velocidad, se hizo obstensiblemente más fácil tirar de la lancha, mientras que detrás de ella desapareció la traza de la onda». Explíquese este fenómeno.

Para el problema 3.7.11.

3.7.11. Conforme al principio de Huygens, cada sección del frente de la onda sonora es fuente de ondas esféricas secundarias. La envolvente de las ondas secundarias da un nuevo frente de onda ¿Por qué?

3.7.12. Partiendo del principio de Huygens, muéstrese que en un medio homogéneo el frente plano se desplaza a velocidad del sonido por su normal. ¿Cómo se propaga el frente cilíndrico? ¿El esférico?

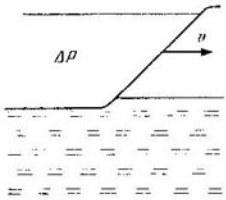
3.7.13. La zona de presión elevada en la superficie de separación del medio se propaga a la derecha con una velocidad v, superior a la velocidad del sonido c en el medio. ¿Cuál es el frente de la onda en el medio? ¿Cuál es su dirección de propagación?

3.7.14. Una onda plana incide sobre una superficie de separación plana de dos medios con velocidades del sonido c_1 y c_2 bajo un ángulo α a la normal. Hállense las direcciones de propagación de las ondas reflejada y refractada. ¿Cómo cambia la longitud de onda al refractarse?

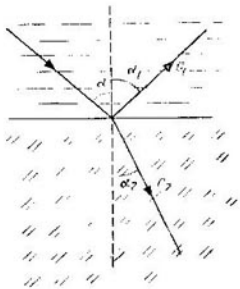
3.7.15. Cuando el avión vuela a velocidad subsónica, en la Tierra se oye el ruido de los motores. En cambio cuando sobre noso-

tros vuela un supersónico, primero se oye un estampido fuerte y luego ya el ruido de los motores. ¿Con qué está relacionado eso?

3.7.16. Durante la caída en declive suficientemente suave de la onda sonora plana sobre la superficie de separación en el medio, en el que la velocidad del sonido es mayor, la onda incidente no



Para el problema 3.7.13.



Para el problema 3.7.14.

forma onda reflejada. Este fenómeno se denomina reflexión interna total. Hállese el ángulo crítico de la reflexión interna total si las velocidades del sonido en estos medios son c_1 y c_2 ($c_1 < c_2$).

3.7.17. Sobre la superficie del agua se mueve el aire. ¿Cómo influirá eso sobre las direcciones de propagación de las ondas sonoras reflejada y refractada?

3.7.18. a) La velocidad de la «onda en agua poco profunda» disminuye al reducir la profundidad. El frente directo de semejante onda al acercarse a la orilla, que penetra en el agua en pendiente suave, se curva «tendiendo» repetir la forma de la orilla. ¿Por qué?

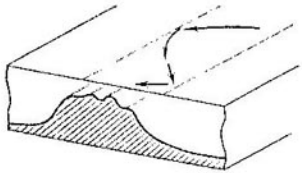
b) Represéntese cualitativamente de qué manera varía el frente de la onda inicial plana que choca en su camino con un banco de arena circular y suave.

3.7.19*. Durante los terremotos en el fondo del océano surgen perturbaciones de gran extensión en la superficie de agua, a saber: las grandes ondas tsunami. Éstas se propagan a gran distancia sobre todo en las cadenas montañosas submarinas, casi sin perder su capacidad destructiva. Explíquese eso.

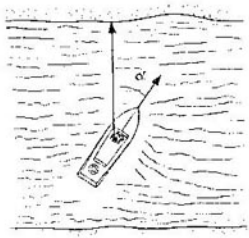
3.7.20*. ¿Por qué el sonido se oye mucho mejor en dirección del viento que contra éste? La velocidad del viento disminuye considerablemente al aproximarse a la superficie terrestre.

3.7.21. La frecuencia de las oscilaciones propias del diapasón es ν_0. ¿El sonido de qué frecuencia oiremos, si acercamos el diapasón al oído a la velocidad v?

3.7.22. Las olas inciden sobre la orilla con la frecuencia ν_0. ¿Con qué frecuencia chocarán contra la lancha motora que se mueve a velocidad v alejándose de la orilla? ¿Acercándose a la orilla?



Para el problema 3.7.19*.

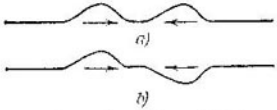


Para el problema 3.7.22.

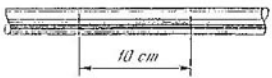
Examínese el movimiento de la lancha motora bajo un ángulo α hacia la dirección de la propagación de las olas. La velocidad de las olas en el agua es c.

§ 3.8. Adición y reflexión de las ondas

3.8.1. Por una cuerda se propagan dos ondas opuestas con energía W cada una. ¿Cuáles serán las energías cinética y potencial en el instante en que coincidan las bases de las ondas, mostradas en la figura? Los perfiles de las flexiones son iguales.



Para el problema 3.8.1.



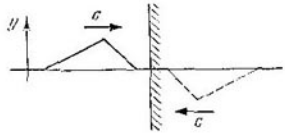
Para el problema 3.8.2.

3.8.2. Un trozo de la barra de acero con longitud de 10 cm se comprime en 10^{-3} de su longitud y se deja libre. ¿Qué ondas progresivas surgirán en la barra? Trácense los perfiles de la deformación y de la velocidad de las partículas después de que pasen $5 \cdot 10^{-5}$ s.

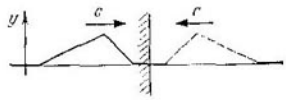
3.8.3. En caso de incidencia normal de la onda contra una pared rígida surge una perturbación, para la cual el desplazamiento y la velocidad de las partículas del medio en las inmediaciones de la pared son nulos. Si se supone que a la onda incidente se adiciona una onda inversa de desplazamientos que se propaga simétricamente por detrás de la pared, se obtiene la perturbación con las propiedades

requeridas al lado de la pared. Trácense para la onda incidente, mostrada en la figura, la distribución del desplazamiento del medio cuando la onda «penetra en la pared» a 1/6, 1/2 y 2/3 de la longitud de su base.

3.8.4. ¿Cómo depende del tiempo la presión sobre la pared cuando sobre ésta incide una onda sonora sinusoidal con frecuencia ω y amplitud de desplazamiento A? La densidad del medio es ρ y la velocidad del sonido es c. ¿A qué distancias respecto a la pared



Para el problema 3.8.3.



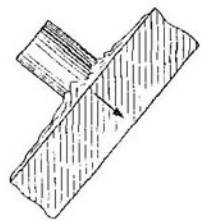
Para el problema 3.8.5.

se encuentran los nodos y vientres de la velocidad, así como los nodos y vientres de la presión?

3.8.5. En la superficie de separación libre del medio la tensión es nula y, por consiguiente, también las deformaciones son nulas. Hágase uso del método de solución del problema 3.8.3 para hallar la perturbación que surge al incidir la onda sobre la superficie de separación libre. ¿Por qué en este caso la onda de desplazamiento que llega por detrás de la superficie de separación libre resulta no volcada?

3.8.6. La velocidad del extremo libre de una barra varía siguiendo la ley $v_0 \operatorname{sen} \omega t$, a causa de la llegada de la onda con desplazamiento longitudinal. ¿Qué amplitud tendrá esta onda? ¿A qué distancias del extremo de la barra se forman nodos y vientres de la velocidad, así como nodos y vientres de la presión?

Para el problema 3.8.7.



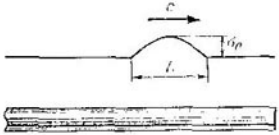
Para el problema 3.8.8*.

3.8.7. En la parte exterior del cristal de la ventanilla en la nave cósmica aparecen resquebrajaduras, provocadas por la inciden-

cia de micrometeoritos. Semejantes resquebrajaduras aparecen también en la parte interior. Explíquese su aparición.

3.8.8*. Para luchar contra los tanques se utilizan proyectiles «plásticos»: el explosivo al chocar se extiende por el blindaje y luego explota. La onda, engendrada por la explosión, atraviesa el grosor del blindaje y desprende de la parte interior una capa que vuela con gran velocidad. Hállese esta velocidad y el grosor de la capa del blindaje desprendida, si la presión al explotar $P = 5 \cdot 10^4$ atm y actúa durante el tiempo $\tau = 4 \cdot 10^{-6}$ s. La velocidad del sonido en el blindaje es $c = 5$ km/h y la densidad del blindaje $\rho = 8$ g/cm^3.

3.8.9*. El límite de resistencia a la tracción de la cerámica y los vidrios es menor que a la compresión. Como consecuencia de un



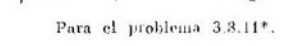
Para el problema 3.8.9*.

Para el problema 3.8.10.

golpe en el extremo izquierdo de una barra de cristal surge una onda de compresión: «una semionda» de sinusoida con amplitud de tensión σ_0 y extensión L. ¿Qué parte de la barra se desprenderá si el límite de resistencia a la tracción $\sigma < \sigma_0$? Examínense los casos $\sigma_0 \gg \sigma$ y $\sigma_0 \approx \sigma$.

3.8.10. Una barra de acero con 1 m de longitud se golpea con un extremo contra una pared inmóvil rígida. Su velocidad inicial es de 100 m/s. ¿Qué presión ejercerá sobre la pared? ¿Qué ondas se desplazarán por la barra? ¿Cuánto tiempo estará en contacto? ¿Cuál será la velocidad final de la barra?

3.8.11*. Dos barras elásticas de la misma sección, cuyas longitudes se relacionan como las velocidades del sonido en las barras,



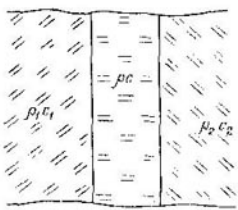
Para el problema 3.8.11*.

chocan con sus extremos. Examinando las ondas engendradas durante la colisión y su reflexión de los extremos libres, demuéstrese que el resultado de la colisión es el mismo que durante una colisión absolutamente elástica frontal. ¿Qué pasará si la relación de las longitudes no es igual a la razón de las velocidades del sonido en las barras?

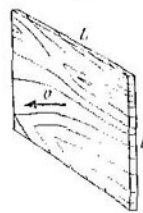
3.8.12*. De un medio con densidad ρ_1 incide una onda con velocidad u_1 perpendicularmente a la superficie de separación del medio con densidad ρ_2. Las velocidades del sonido en los medios primero y segundo son c_1 y c_2. Partiendo de los principios de conservación del impulso y energía, hállese la velocidad del medio en las ondas reflejada y refractada. ¿Se interrumpirá la velocidad en la superficie de separación? ¿En qué caso el signo de la velocidad cambia en la onda reflejada?

3.8.13. Se llama coeficiente de paso a la relación entre la energía en la onda refractada y la energía en la incidente. Hállese ese coeficiente para la onda sonora en la superficie de separación agua — aire.

3.8.14. Para elevar la potencia de un captador piezoeléctrico, éste se conecta al medio a investigar mediante una junta especial.



Para el problema 3.8.14.



Para problema 3.8.15*.

Sea que $\rho_1 c_1 : \rho c = \rho c : \rho_2 c_2 = 4$. Aquí ρ_i y c_i son las densidades y las velocidades del sonido en la junta, en el medio y en el cristal del captador piezoeléctrico. Compárense, según la potencia, las señales que ingresan al captador con la junta y sin ella, si la duración de las señales es inferior al tiempo necesario para pasar la junta.

3.8.15*. Una placa de dimensiones $L \times L$ vibra de modo armónico perpendicularmente a sí misma con la frecuencia $\omega \gg c/L$, donde c es la velocidad del sonido en el aire. Estímese la fuerza que ejerce sobre ella el aire en el instante en que la velocidad de la placa es v. La densidad del aire es ρ. ¿Cuál es el movimiento, desde el punto de vista cualitativo, del aire a condición de que $\omega \ll c/L$? ¿Por qué en este caso la emisión del sonido es más débil?

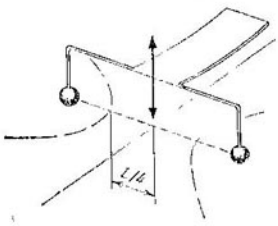
3.8.16. Una esfera de radio R efectúa oscilaciones radiales armónicas con frecuencia ω y amplitud A en un líquido, cuya densidad es ρ. La velocidad del sonido es c. ¿Qué energía de onda sonora emite la esfera en término medio durante un período? ¿Cómo cambia la amplitud de las oscilaciones de presión a medida del alejamiento de la esfera? Considérese $A \ll R$.

3.8.17*. a) En la sección de una barra infinita actúa una fuerza

longitudinal exterior $f_0 \cos \omega t$. ¿Qué ondas de velocidad y deformación engendra ella? La sección de la barra es S; la densidad, ρ y la velocidad de la onda, c.

b) Sea que distando l actúan dos fuentes de semejantes fuerzas. ¿Qué ondas se engendran en este caso? ¿A qué l la potencia radiada es la máxima y la mínima? ¿Por qué la energía emitida no es igual a la suma de las energías emitidas por cada fuente que funciona por separado?

3.8.18*. En el planteamiento del problema anterior la fuerza izquierda varía como $f_0 \cos \omega t$ y la derecha, como $f_0 \operatorname{sen} \omega t$. ¿Para qué valores de l la onda se propagará solamente hacia la izquierda y para cuáles sólo hacia la derecha?



Para el problema 3.8.19.

3.8.19. A un dipolo de frecuencia ω se sujetan dos bolas que distan L. Ellas excitan ondas en la superficie del agua (véase la figura). Hállese la velocidad de las ondas en el agua.

3.8.20*. a) Al aplicar una fuerza armónica, que actúa sobre el extremo de una barra libre de longitud L, a causa de reflexiones múltiples se forma una onda estacionaria. ¿Dónde se encuentran los nodos de las tensiones en ella? ¿Cuál será la amplitud de la fuerza motriz F_0, si la amplitud de las tensiones en la onda estacionaria es σ_0 y la sección de la barra es S?

b) Trácese la curva de resonancia: la gráfica de la dependencia $\sigma_0 S/F_0$ con respecto a la frecuencia ω de la fuerza motriz. ¿Para qué frecuencias son posibles las oscilaciones armónicas en ausencia de la fuerza motriz?

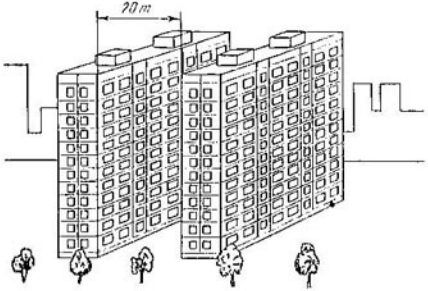
3.8.21. Hállense las frecuencias propias de las oscilaciones longitudinales para una barra de acero de 1 m de longitud. ¿Cómo cambiarán las frecuencias propias de las oscilaciones de una bola de acero al aumentar dos veces su radio?

3.8.22. Entre dos paredes paralelas rígidas hay aire. Una de las paredes empieza a moverse armónicamente con una amplitud A_0 y frecuencia ω. La distancia entre las paredes es $L \gg A_0$. ¿Hasta qué amplitud de desplazamiento en el «vientre» «animará oscilaciones» en el aire dicha pared? Estímese el tiempo en que se intensifican las oscilaciones, si la velocidad del sonido en el aire es igual a la velocidad c.

3.8.23. Determínese la primera frecuencia de resonancia de las oscilaciones del aire entre dos edificios paralelos que distan 20 m. La altura de los edificios es considerablemente mayor que esta distancia. La velocidad del sonido en el aire es de 330 m/s.

3.8.24. Acerquemos un diapasón en vibración a un recipiente

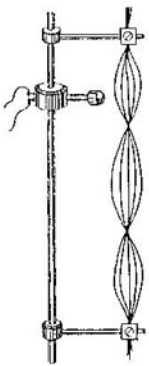
cilíndrico alto. Si empezamos a verter en él poco a poco agua, oiremos un sonido que va intensificándose hasta ser fuerte, luego de



Para el problema 3.8.23.

nuevo se debilita, y de nuevo se intensifica. ¿Cómo se explica eso? ¿Por qué sin el recipiente el diapasón suena débilmente?

Para el problema 3.8.24.



Para el problema 3.8.29.

3.8.25. ¿A qué profundidad del océano pueden intensificarse en él oscilaciones infrasonoras fisiológicamente peligrosas con frecuencia $\nu = 7$ Hz?

3.8.26. ¿Para qué el cuerpo hueco del violín y violonchelo se hacen de forma irregular? ¿Cómo depende de sus dimensiones el tono de sonido?

3.8.27. En una cámara barométrica, llena de una mezcla de helio y oxígeno, la velocidad del sonido es mucho mayor que la velocidad del sonido en el aire. ¿Cómo cambiará el sonido de las voces de la gente que habla en dicha cámara? ¿Variará allí el tono del diapasón?

3.8.28. ¿Con qué fuerza es necesario tensar la cuerda de una guitarra de longitud $l = 60$ cm y densidad lineal $\mu = 0{,}1$ g/cm para que suene con la frecuencia de $\nu = 100$ Hz en el primer armónico, es decir, en la primera frecuencia de resonancia?

3.8.29. Las oscilaciones en la cuerda de longitud L se excitan, dejando pasar por ella una corriente alterna de manera que la fuerza magnética, que ejerce un pequeño imán, varía armónicamente. La frecuencia de la corriente corresponde al tercer armónico. ¿Dónde es necesario colocar el imán para que la amplitud de las oscilaciones sea la máxima?

3.8.30. Si una barra que emite sonidos del primer armónico se toca con la mano, aquélla casi de repente deja de sonar. Explíquese el porqué. ¿Para qué parte de la barra este efecto es el más débil y para cuál el más fuerte?

3.8.31*. A bajas temperaturas las pérdidas energéticas en los monocristales de zafiro, suspendidos correspondientemente en el vacío, durante un período en el primer armónico son 10^{-8} de la energía de las oscilaciones. ¿En cuánto aumentarán dichas pérdidas en el aire? La densidad del zafiro es de 3000 kg/m^3 y la velocidad del sonido en él es de 6 km/s. Para el aire la densidad es de 1,3 kg/m^3 y la velocidad del sonido es de 0,33 km/s.

Capítulo 4

MECÁNICA DEL LÍQUIDO (FLUIDO)

§ 4.1. Presión del líquido

4.1.1. ¿Qué se llama presión de un líquido? Idéese un método de medir la presión.

4.1.2. En el líquido se halla un prisma rectangular, cuyas dimensiones se dan en la figura. Búsquese la suma de las fuerzas que actúan sobre la cara frontal e inferior del prisma, si la presión del líquido es de $2 \cdot 10^5$ Pa. ¿Cuál es la suma de las fuerzas que actúan sobre el prisma?

4.1.3. La resultante que ejerce el líquido comprimido sobre tres caras de un tetraedro regular es igual a F. La longitud de la arista del tetraedro es a. Determínese la presión del líquido.

4.1.4. En el tubo se encuentra un émbolo, cuya sección longitudinal se muestra en la figura. La presión del líquido es la misma por ambos lados del émbolo. ¿Se encontrará el émbolo en equilibrio?

4.1.5. Una esfera tapa un orificio de radio r en cierta pared plana que divide dos líquidos con presiones $3P$ y P. ¿Con qué fuerza se aprieta la esfera contra el orificio?

4.1.6. Un tapón cónico tapa al mismo tiempo dos orificios en un recipiente plano, lleno de líquido a presión P. Los radios de los orificios son r y R. Determínese la fuerza que ejerce el líquido sobre el tapón.

4.1.7*. Una botella esférica de radio R con paredes de grosor $\Delta \ll R$ estalla a causa de la presión interna P. Determínese el límite de resistencia del material de las paredes.

4.1.8. ¿Por qué la salchicha en agua hirviendo revienta a lo largo de su longitud y no en sentido transversal?

4.1.9. Tres recipientes comunicantes con agua están tapados con émbolos. Una varilla horizontal se fija articuladamente en vástagos verticales hacia los émbolos. ¿En qué parte de la varilla es necesario aplicar la fuerza F para que ella siga permaneciendo horizontalmente? Los diámetros de los recipientes y las distancias entre ellos se indican en la figura.

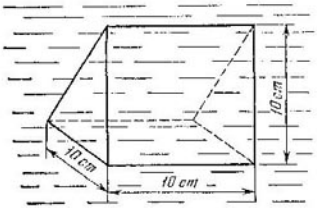
4.1.10. Una presa hidráulica, llena de agua, tiene émbolos de secciones de 100 y 10 cm^2. Sobre el émbolo grande se pone una persona con masa de 80 kg. ¿A qué altura después de eso se elevará el émbolo pequeño?

4.1.11. Un cuerpo en forma de un cubo, cuya arista es de 20 cm, se halla en un depósito de agua. La cara inferior del cubo está alejada de la superficie del agua a la distancia de 1 m. La presión atmosférica es de 10^5 Pa. ¿Cuál es la fuerza que ejerce el agua sobre la cara inferior, sobre la superior y sobre la lateral? Búsquese la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

4.1.12*. La cara inferior de un tetraedro regular con arista a, sumergido totalmente en un líquido de densidad ρ, dista h de la superficie del líquido. Determínese la fuerza que ejerce el líquido sobre la cara lateral del tetraedro, si la presión atmosférica es igual a P y la aceleración de la caída libre (de gravedad) es g.

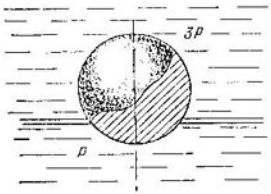
4.1.13. En el fondo de un recipiente, que forma un ángulo α con el horizonte, se encuentra un cubo con arista a, hecho de un material de densidad ρ. Hállese la fuerza con que el cubo actúa sobre el fondo, si en el recipiente se vierte un líquido de densidad ρ_0. La arista superior del cubo dista h de la superficie del líquido. Entre el fondo del recipiente y el cubo no hay líquido. La presión atmosférica es P y la aceleración de la caída libre es g.

4.1.14. Un tubo de radio r se cierra por abajo con un disco metálico y se sumerge en un líquido a la profundidad l. El radio del disco es R y la altura es h. El eje del disco dista a del eje del tubo. La densidad del líquido es ρ_0 y la del metal es ρ. ¿Hasta qué

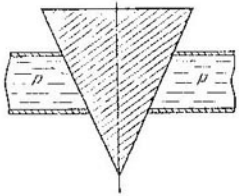


Para el problema 4.1.2.

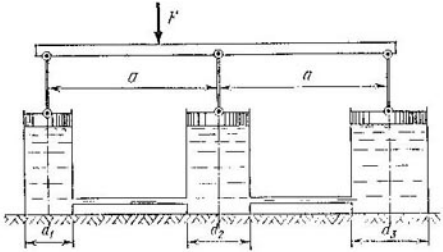
Para el problema 4.1.4.



Para el problema 4.1.5.



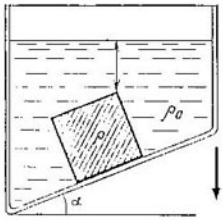
Para el problema 4.1.6.



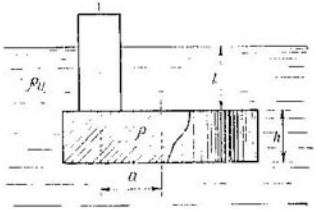
Para el problema 4.1.9.

altura es necesario verter líquido en el tubo para que el disco se separe del tubo?

4.1.15. En la tapa de un recipiente con agua hay un orificio cilíndrico, tapado herméticamente con un émbolo móvil. En el



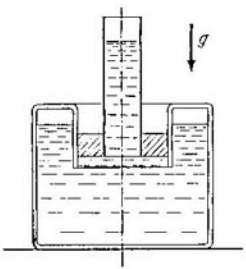
Para el problema 4.1.13.



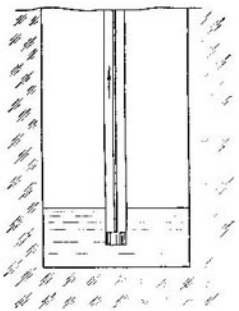
Para el problema 4.1.14.

émbolo se instala un tubo vertical. El radio del émbolo es de 10 cm, el radio del tubo es de 5 cm y la masa del émbolo junto con el tubo es de 20 kg. Determínese la altura de la columna de agua en el tubo cuando el sistema se encuentra en equilibrio.

4.1.16. Un émbolo, que tapa un tubo cilíndrico de radio interno de 10 cm, puede desplazarse con ayuda de un vástago vertical largo.



Para el problema 4.1.15.

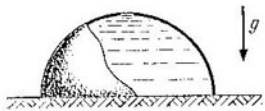


Para el problema 4.1.16.

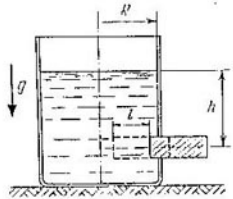
El tubo con el émbolo que ocupa la posición inferior extrema, se mete a una profundidad de 0,5 m a un pozo cilíndrico de radio de 1 m. ¿Hasta qué altura, respecto al nivel inicial del agua en el pozo, se puede elevar el agua en el tubo? La presión atmosférica es de 10^5 Pa.

4.1.17*. En una campana semiesférica, que yace herméticamente sobre la mesa, se echa por un orificio pequeño practicado en lo alto cierto líquido. Cuando el líquido llega hasta el orificio, levanta la campana y empieza a fluir por debajo de ella. Hállese la masa de la campana, si su radio interno es igual a R y la densidad del líquido es ρ.

4.1.18. Demuéstrese que en dos vasos comunicantes el líquido en el campo de gravedad posee una energía potencial mínima, cuando los niveles del líquido en ambos vasos coinciden.



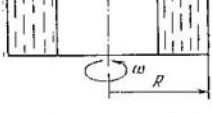
Para el problema 4.1.17*.



Para el problema 4.1.19*.

4.1.19*. En un recipiente cilíndrico de radio R, conteniente un líquido con densidad ρ, en la pared lateral hay un orificio cerrado con un tapón. ¿Qué trabajo es necesario realizar para meter el tapón a la longitud l? El tapón tiene la forma de un cilindro de radio r. El centro del orificio se encuentra a la profundidad h. El recipiente es suficientemente alto para que el agua no salga por encima de él. Despréciese la fricción.

4.1.20*. Hállese la presión a la distancia r del centro de un planeta líquido de radio R, si el líquido tiene densidad ρ. ¿Qué presión habrá en el centro del planeta? La constante de gravitación es γ.



Para el problema 4.1.23*.

4.1.21. En un recipiente con líquido hay una burbuja de gas. No existe campo de gravedad. El recipiente comienza a moverse con una aceleración constante. ¿Hacia dónde empezará a desplazarse la burbuja?

4.1.22. ¿Bajo qué ángulo hacia el horizonte se situará la superficie del líquido en un recipiente que se desliza por un plano inclinado que forma un ángulo α con el horizonte? El coeficiente de fricción es μ.

4.1.23*. Un cilindro cerrado de radio R, 3/4 partes de cuyo volumen están ocupadas por un líquido con densidad ρ, gira en la ingravidez junto con el líquido a una velocidad angular ω alrede-

dor de su eje. ¿Cómo cambia la presión en el líquido en función de la distancia hasta las paredes del cilindro?

4.1.24. Hállese la forma de la superficie líquida en un vaso cilíndrico, puesto verticalmente que gira alrededor de su eje a una velocidad angular ω. La aceleración de gravedad es g.

§ 4.2. Flotación. Principio de Arquímedes

4.2.1. Determínese la presión del líquido sobre la superficie inferior de una arandela que flota de sección S y masa m, si la presión atmosférica es igual a P_0 y la aceleración de la caída libre es g.

4.2.2. En la superficie de separación de dos líquidos con densidades ρ_1 y ρ_2 flota una arandela de densidad ρ ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). La altura de la arandela es h. Determínese a qué profundidad se sumergirá ésta en el segundo líquido.

4.2.3. Un vaso de pared delgada y masa m flota verticalmente en la superficie de separación de dos líquidos con densidades ρ_1 y ρ_2. Determínese la profundidad de sumersión del vaso en el líquido inferior, si el fondo del vaso tiene grosor h y área S y el vaso está lleno del líquido con densidad ρ_1.

4.2.4*. En un líquido de densidad ρ_0 flota un paralelepípedo rectangular, hecho de un material con densidad ρ. La altura del paralelepípedo es b, la anchura y longitud, a. ¿Para qué relación entre a y b su posición es estable?

4.2.5. Un cubo de madera con arista de 0,5 m flota en un lago, $^2/_3$ de aquél están sumergidas en el agua. ¿Qué trabajo mínimo es necesario realizar para hundir el cubo?

4.2.6. Un trozo de hierro pesa en el agua 1 kgf. Determínese su volumen. La densidad del hierro es de 7,8 g/cm^3.

4.2.7. Un cuerpo pesa tres veces menos en el agua que en el aire. ¿Qué densidad tiene el cuerpo?

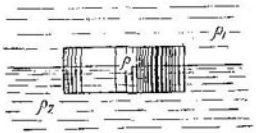
4.2.8. A la palanca de una balanza se cuelgan dos cargas de idénticas masas. Si una de las cargas se mete en un líquido de densidad ρ_1 y la otra en un líquido de densidad ρ_2, el equilibrio se conserva. Hállese la relación de las densidades de las cargas.

4.2.9*. En los vasos comunicantes de diámetros d_1 y d_2 se vierte un líquido de densidad ρ. ¿En cuánto subirá el nivel del líquido en los recipientes, si en uno de ellos se coloca cierto cuerpo de masa m, hecho de un material cuya densidad es inferior a ρ?

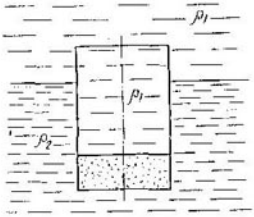
4.2.10. Determínese la tensión del sedal inferior del flotador, mostrado en la figura, si $^2/_3$ de la longitud de éste están sumergidas en el agua. La masa del flotador es de 2 g.

4.2.11. ¿Con qué fuerza presiona un palo pesado sobre el fondo del depósito de agua, si una bola de radio r, unida rígidamente con el palo, se sumerge a medias en el líquido. La densidad del líquido es ρ y la longitud del palo, l.

4.2.12. Determínese la tensión del hilo que une dos bolas de volumen de 10 cm^3, si la bola superior flota, sumergida a medias en el agua. La bola inferior es tres veces más pesada que la superior.

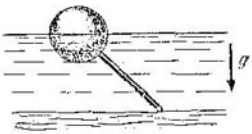


Para el problema 4.2.2.

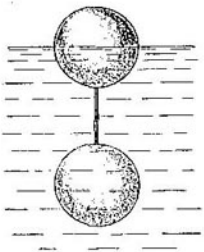


Para el problema 4.2.3.

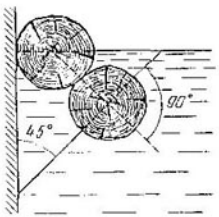
Para el problema 4.2.10.



Para el problema 4.2.11.



Para el problema 4.2.12.



Para el problema 4.2.13.

4.2.13. Dos troncos idénticos se sitúan de la manera indicada en la figura. El tronco inferior está atado a la pared vertical mediante cables que forman con ella un ángulo de 45°. El tronco superior resulta sumergido a medias en el agua. Determínese la densidad de los troncos.

4.2.14. Determínese la presión de los troncos de masa m sobre las paredes del canal. El tronco superior está sumergido a medias en el agua y el inferior roza la superficie del agua con su parte superior.

4.2.15*. ¿Cómo depende la fuerza que comprime los dos semicilindros iguales del batiscafo flotante en función de la profundidad de su sumersión H, si aquél flota en la superficie del agua de la manera mostrada en las figuras a y b? El radio del batiscafo es R, la longitud L y la densidad del líquido es ρ.

4.2.16*. Demuéstrese que la fuerza con que se comprimen las mitades de un batiscafo esférico no depende de la inclinación del plano de contacto de las semiesferas del batiscafo, si éste está sumergido totalmente en el líquido.

4.2.17. Un tapón cónico de 10 cm de altura con el ángulo del vértice de 90° tapa un orificio de radio de 5 cm. ¿Qué masa deberá tener este tapón para que él no emerja a la superficie al cambiar el nivel de agua en el recipiente.

4.2.18*. Resuélvase el problema 4.2.17 a condición de que el orificio de radio r tapa una esfera de radio R y la densidad del líquido es igual a ρ.

4.2.19*. La inclinación de una caja cúbica, sumergida a medias en un líquido, es igual a α. Determínese la masa de cada una de las dos aristas opuestas de la caja. Menospréciese la masa de las demás partes de la caja. La densidad del líquido es ρ y la longitud de las aristas de la caja es a.

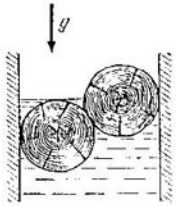
4.2.20*. Determínese la tensión mínima de dos cables que unen una balsa ancha que consta de dos capas de troncos. La masa de cada tronco es m. La capa superior de los troncos está sumergida a medias en el agua.

4.2.21. En un cilindro de radio R, que contiene cierta cantidad de líquido, cae un tapón cilíndrico de radio r y altura h. La altura inicial del extremo inferior del tapón sobre el nivel del líquido es H y la velocidad inicial es nula. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá para el instante en que cese el movimiento del líquido y del tapón? La densidad del tapón es ρ y la del líquido $\rho_0 > \rho$.

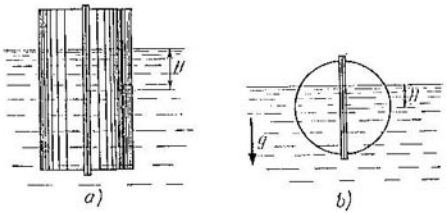
4.2.22. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá en un depósito de agua al emerger en él una burbuja de aire de radio $R = 0{,}1$ m desde la profundidad $H = 10$ m? La densidad del agua es ρ.

4.2.23. ¿Qué trabajo mínimo es necesario realizar para sacar del fondo del mar, instalándolo a bordo de un barco, un batiscafo de radio de 2 m? La masa del batiscafo es de 35 t; la profundidad del mar, de 100 m y la altura del borde del barco es de 3 m.

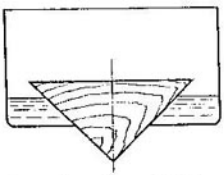
4.2.24*. Para crear gravedad artificial una nave cósmica cilíndrica de radio R gira alrededor de su eje a la velocidad angular ω.



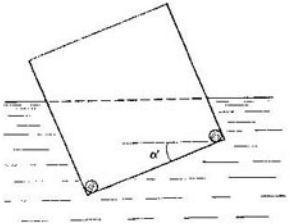
Para el problema 4.2.14.



Para el problema 4.2.15*.



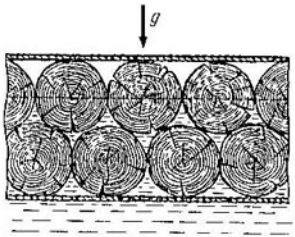
Para el problema 4.2.17.



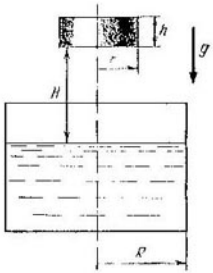
Para el el problema 4.2.19.

La piscina en la nave es de una profundidad H y como fondo de la misma sirve la pared lateral de la nave.

a) ¿Podrá el astronauta nadar en esta piscina? Descríbase la particularidad de la piscina cósmica. Determínese la densidad de un



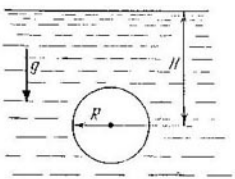
Para el problema 4.2.20.



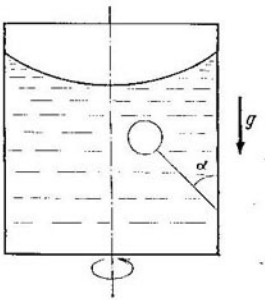
Para el problema 4.2.21.

palo que flota en la piscina y tiene longitud $l < H$, si del agua sobresale su parte superior de longitud Δ.

b) En la piscina puede observarse el siguiente fenómeno interesante: dos esferas de diferente densidad, unidas por un hilo, se



Para el problema 4.2.22.



Para el problema 4.2.26.

mueven en función de la «profundidad» ya sea hacia la superficie libre, o bien hacia la pared de la nave cósmica, si la densidad de una de las esferas supera la densidad del agua, en tanto que la de la

otra esfera es menor que la densidad del agua. Explíquese dicho fenómeno.

4.2.25. Un recipiente cilíndrico de radio R, lleno de un líquido con densidad ρ_0, gira alrededor de su eje a la velocidad angular ω. En el recipiente se encuentra una bola de radio r y densidad $\rho > \rho_0$. Hállese la fuerza con que la bola presionará sobre la pared lateral del recipiente.

4.2.26. Un recipiente cilíndrico de radio R, que contiene cierta cantidad de líquido, gira junto con el líquido alrededor de su eje. A la pared lateral del recipiente por un hilo de longitud l se amarra un globo de radio r. Durante la rotación, el hilo forma con la pared el ángulo α. Determínese la velocidad angular de rotación. El campo de gravedad está dirigido a lo largo del eje del recipiente.

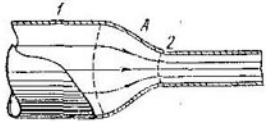
§ 4.3. Movimiento del líquido perfecto

4.3.1. La estación de bombeo urbana mantiene en la tubería de alimentación de agua, a nivel del primer piso, una presión de 5 atm. Determínese (menosprociando la fricción al fluir el líquido) la velocidad del chorro de agua que sale de los grifos en los pisos primero, segundo y tercero, si los grifos de cada piso siguiente distan 4 m por la vertical. ¿A qué piso el agua ya no ascenderá por la tubería de alimentación de agua?

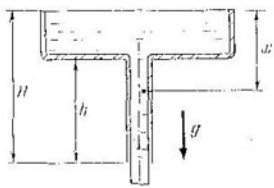
4.3.2. Un recipiente con agua está suspendido del techo. La altura del agua en el recipiente es h. ¿En cuánto variará la tensión en el soporte suspendedor, si en el fondo del recipiente se abre un orificio pequeño del que sale un chorro de sección S? La densidad del agua es ρ.

4.3.3. Una bomba debe impulsar cada segundo un volumen Q de agua a la altura h por un tubo de sección constante S. ¿Cuál deberá ser la potencia de la bomba? La densidad del agua es ρ.

4.3.4. a) Un flujo estacionario de líquido, que circula por un tubo de sección aleatoria, presiona con la fuerza F sobre la parte A



Para el problema 4.3.4.



Para el problema 4.3.5.

entre las secciones *1* y *2*, la cual, según la tercera ley de Newton, presiona con la misma fuerza en dirección contraria. Por consiguiente, la fuerza sumaria que ejerce dicha parte sobre el líquido, está

dirigida contra el movimiento del líquido. Entonces, ¿por qué el líquido en la zona *2* posee mayor velocidad que en la zona *1*?

b) ¿Con qué fuerza sumaria actúa la parte *A* sobre el líquido? Las áreas de las secciones en las zonas *1* y *2* son iguales a S_1 y S_2. La densidad del líquido es ρ. En la zona *2* la velocidad del líquido es igual a v y la presión es nula.

4.3.5. De un recipiente ancho a través de un tubo cilíndrico estrecho sale un líquido de densidad ρ. ¿Cómo se distribuyen, según la vertical, la presión y velocidad del líquido en el recipiente y en el tubo? La presión del aire es P_0.

4.3.6. Por un tubo, doblado bajo un ángulo recto y de sección transversal S, fluye a la velocidad v cierto líquido de densidad ρ. ¿Con qué fuerza actúa el líquido sobre el tubo, si su presión en la salida de éste es P? Menospréciese la fuerza de gravedad.

4.3.7. Una bomba consta de un cilindro colocado horizontalmente, un émbolo de área S y un orificio de salida de área s, situado en el eje del cilindro. Determínese la velocidad del chorro que sale de la bomba, si el émbolo bajo la acción de la fuerza F se desplaza a velocidad constante. La densidad del líquido es ρ.

4.3.8. Por un plano inclinado se derrama un flujo ancho de agua. A la distancia l en sentido de la corriente la profundidad del flujo disminuye a la mitad. ¿A qué distancia la profundidad del flujo disminuirá en 4 veces?

4.3.9. Una placa de masa m se mantiene en el sitio en posición horizontal mediante N chorros de un líquido que fontanean verticalmente hacia arriba de unos orificios de sección S cada uno. La velocidad del líquido en la salida del orificio es v. ¿A qué altura sobre los orificios se mantiene la placa?

4.3.10*. ¿En cuántas veces aumentará el desagüe a través de una presa ancha, si el nivel de agua sobre el borde de la presa crece al doble? El perfil de la presa se muestra en la figura.

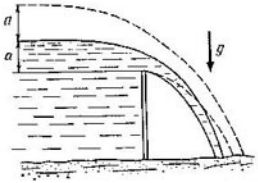
4.3.11*. El desagüe de un recipiente plano y ancho transcurre por un corte triangular en su borde. ¿En cuánto disminuirá el desagüe al reducir el nivel de agua desde H hasta h?

4.3.12. Un chorro infinito plano de líquido de grosor h incide bajo un ángulo α a velocidad v sobre cierto plano. ¿En qué chorros se descompone el chorro incidente?

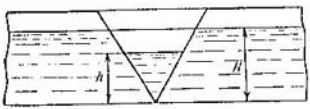
4.3.13*. Dos placas, situadas bajo el ángulo 2α una a la otra, se mueven a velocidad v según las normales respecto a sus superficies. Hállense las velocidades de los chorros que surgen al chocar las placas, si el movimiento del material de las placas se considera como movimiento de un líquido perfecto.

4.3.14*. Determínese la forma de un chorro estacionario después de la colisión de dos chorros con radios R y r que se movían al encuentro con velocidades iguales.

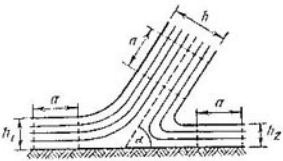
4.3.15. «...En el año 1941 los alemanes inventaron un proyectil antitanque cumulativo (con carga hueca). En el cono del proyectil se encontraba la espoleta. Al chocar, ésta provocaba la detonación



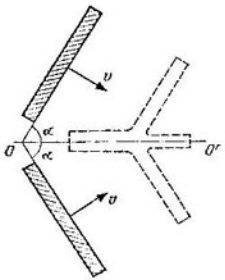
Para el problema 4.3.10*.



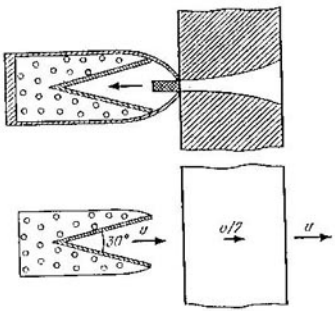
Para el problema 4.3.11*.



Para el problema 4.3.12.



Para el problema 4.3.13*.



Para el problema 4.3.15.

y encendía toda la carga. El proyectil perforaba todo el blindaje. En 1944 semejantes proyectiles alemanes fueron a parar a nuestras manos, así como a las de nuestros aliados. Procedimos a un experimento extenso. Fueron descubiertos muchos efectos complementarios y paradojas. Decidimos aclarar qué es lo que vuela y qué es lo que perfora. Primero se pensó que dicho proyectil es tipo perforador incendiario del blindaje, o sea, que es un chorro de gas caliente el que perfora el blindaje. Pero no, resultó que el que vuela es el metal ...: ante la plancha a velocidad de 8 km/s, dentro de ésta, de 4 km/s y detrás de la misma de nuevo a velocidad de 8 km/s». (Del discurso inaugural del académico M. A. Lavréntiev, Presidente del Presidium de la Sección Siberiana de la Academia de Ciencias de la URSS, ante los alumnos de la escuela físico-matemática veraniega en 1971.) Explíquese este fenómeno. Determínese con qué velocidad se movía la pared de la cavidad cónica metálica que tapa la carga, si el ángulo del vértice de la cavidad es de 30°.

Para el problema 4.3.16*.

4.3.16*. La densidad del líquido es ρ. En el instante inicial éste llena una parte vertical de longitud l en un tubo en L. Hállese cómo depende la altura del nivel del líquido respecto al tiempo. Búsquese la distribución de la presión en el instante en que la altura de la columna disminuye a la mitad.

4.3.17*. De un orificio en el fondo de cierto recipiente alto sale agua. La sección del recipiente es S y la sección del chorro, s. El nivel de agua en el recipiente se desplaza con aceleración constante. Hállese esta aceleración.

4.3.18. Un cilindro con émbolo contiene agua, dentro de la cual en el instante incial existe cierta cavidad de volumen V. El émbolo ejerce sobre el agua una presión constante P. ¿Qué energía adquirirá el agua cuando desaparezca la cavidad?

4.3.19*. Examínese el «cierre» de una cavidad esférica en un depósito grande de agua. La presión del agua es P y el radio inicial de la cavidad es R. Determínese la velocidad del agua en la superficie de separación de la cavidad cuando su radio era r.

4.3.20. a) Estímese en caso de qué velocidad del borde de la pala de la hélice de una lancha motora detrás de dicha pala surgirá una cavidad.

b*) ¿A qué intensidad del ultrasonido empiezan a surgir en el agua a presión atmosférica las microcavidades? La compresibilidad del agua es de $5 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}.

§ 4.4. Flujo de un líquido (fluido) viscoso

4.4.1. El espacio entre dos planos paralelos está lleno de un fluido de viscosidad η. Uno de los planos se mueve a velocidad v_0

y el otro está en reposo. Hállese la distribución de las velocidades del fluido entre los planos y la fuerza de viscosidad, que actúa sobre la unidad de área de cada uno de los planos que distan h.

4.4.2. Hállese la distribución de las velocidades en caso de un flujo estacionario de un fluido entre dos planos. La distancia entre los planos es h y la viscosidad del fluido es η. Hállese el gasto de fluido por unidad de anchura del flujo, si la diferencia de presión por *unidad* de longitud (en dirección del movimiento del fluido) es igual a ΔP.

4.4.3*. Un líquido se transvasa de un recipiente a otro por un tubo largo de radio R y longitud l. Determínese la dependencia entre la velocidad del líquio y la distancia hasta la pared del tubo, si la diferencia de presiones en los extremos del tubo es ΔP y la viscosidad del líquido es η.

Para el problema 4.4.5.

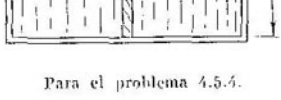
4.4.4. Determínese el gasto de líquido por unidad de anchura de un flujo plano que fluye por un plano inclinado bajo el ángulo α hacia el horizonte. La viscosidad y densidad del líquido son η y ρ. El grosor del flujo es h.

4.4.5. En el tubo de sección variable circula un flujo estacionario de un líquido viscoso. En las secciones *1* y *2* la velocidad puede considerarse constante por toda la sección. Las áreas de las secciones *1* y *2* son iguales a S_1 y S_2. Las presiones del líquido en las secciones *1* y *2* son P_1 y P_2. La velocidad del flujo del líquido en la sección *1* es v_1. Hállese la fuerza con que el líquido actúa sobre la parte del tubo dispuesta entre las secciones *1* y *2*.

§ 4.5. Tensión superficial de un líquido

4.5.1. ¿Qué es lo que se denomina tensión superficial? Cítense ejemplos de la manifestación de las fuerzas de tensión superficial.

4.5.2. ¿Por qué el agua en la cabina de una nave cósmica queda «suspendida» en el aire en forma de una esfera? Cuanto menores son las gotitas de mercurio en el suelo, tanto más su forma se parece a una esfera ¿Por qué?



Para el problema 4.5.4.

4.5.3. Estímese el tamaño máximo de las gotas de agua que pueden estar «suspendidas» en el techo. La tensión superficial del agua es de 0,073 N/m.

4.5.4. Las películas de dos líquidos se dividen por un tabique de longitud l. Las tensiones superficiales de los líquidos son σ_1 y σ_2. ¿Qué fuerza actúa sobre el tabique?

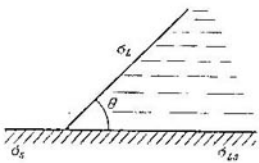
4.5.5. Hállese la tensión superficial de un líquido, si un lazo de un hilo de goma con longitud l y sección S, puesto sobre la película del líquido, se extiende formando una circunferencia de radio después de que la película fue pinchada dentro del lazo. El módulo de Young de la goma es E.

4.5.6. a) Un líquido no moja a un sólido, si $\sigma_l + \sigma_s = \sigma_{ls}$, donde σ_l, σ_s y σ_{ls} son las energías superficiales del líquido, sólido y de la superficie de separación líquido-sólido. ¿De qué razonamientos físicos se desprende dicho resultado?

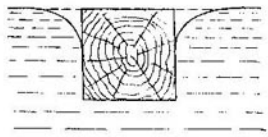
b) ¿Cuándo un líquido moja totalmente a un sólido?

c*) Determínese el coseno del ángulo de contacto θ mediante σ_l, σ_s y σ_{ls}.

4.5.7. Un cubo de hierro, engrasado con parafina, flota en el agua de manera que su cara superior se encuentra a nivel del agua. El agua no moja la parafina. La tensión superficial del agua es de 0,073 N/m. Hállese la longitud de la cara del cubo.



Para el problema 4.5.6.



Para el problema 4.5.8.

4.5.8. ¿En cuántas veces la densidad de la substancia de que está hecho un palito largo de sección cuadrada supera la densidad del líquido, si el palito flota en su superficie de la manera mostrada en la figura?

4.5.9. Determínese la masa máxima de la unidad de área de una placa que no se «hunde», si se la pone con cuidado sobre la superficie del agua. La placa no se moja por el agua.

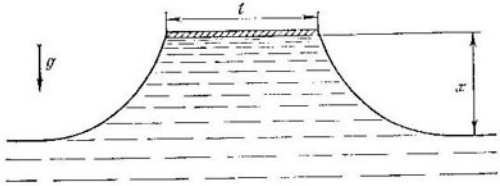
4.5.10. Estímese cuál deberá ser la aceleración de gravedad en un planeta para que un hombre pueda «andar» por el agua con zapatos, cuya suela no se moja por el agua.

4.5.11*. A una placa larga de anchura l la pusieron en contacto con la superficie del líquido. Luego empezaron a elevar la placa. ¿Cómo depende la fuerza que actúa sobre la unidad de longitud de la placa respecto a la altura x a la que la misma se eleva. La densidad del líquido es ρ y la tensión superficial, σ. La masa de la unidad de longitud de la placa es m.

4.5.12. a) La suma de las fuerzas que actúan sobre el volumen del líquido destacado en la figura es nula. Haciendo uso de ello, determínese la altura a que se elevará el líquido por la pared verti-

cal. El ángulo de contacto es θ. La tensión superficial y la densidad de líquido son σ y ρ.

b) ¿A qué altura se levantará el agua por la pared vertical, si la moja totalmente?

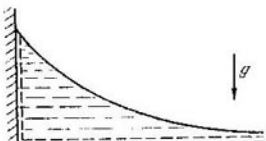


Para el problema 4.5.11*.

4.5.13. a) Determínese el grosor de la capa de un líquido vertido por un plano horizontal. El ángulo de contacto es 0; la densidad del líquido, ρ y la tensión superficial, σ.

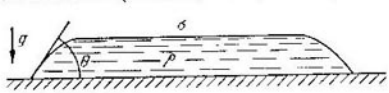
b) Determínese el grosor de la capa de agua vertida por un plano horizontal, cubierto de parafina.

4.5.14*. a) Una parte grande de un líquido está cubierta de una capa de aceite. La tensión superficial y la densidad del líquido son σ_l y ρ_l, la tensión superficial y la densidad del aceite son σ_{ac} y $\rho_{ac} < \rho_l$, la tensión superficial de la superficie de separación líquido — aceite es σ_{lac}. Determínese el grosor de la capa de aceite.



Para el problema 4.5.12.

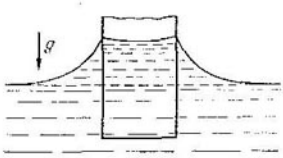
b) «... «Argo-Merchent», un buque cisterna (petrolero) con desplazamiento de 28 691 t, chocó contra un arrecife; el cuerpo del buque se dividió en dos partes, vertiendo a la mar toda la carga de petróleo. Las manchas negras de petróleo se dispersaron a miles de millas cuadradas...» (Nedelia, 1977, N° 19). Estímese el área



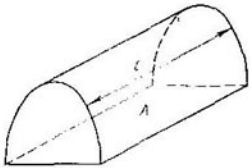
Para el problema 4.5.13a.

total de estas manchas. La tensión superficial del petróleo es de 0,03 N/m y su densidad es de 0,8 g/cm³. El agua no moja al petróleo.

4.5.15*. Demuéstrese que el volumen del líquido que se elevará sobre su nivel general (en la figura dicho volumen viene destacado mediante una línea de trazos) depende solamente del perímetro de la sección del palito sumergido y no depende de la forma de la sección.



Para el problema 4.5.15*.

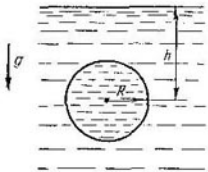


Para el problema 4.5.16a.

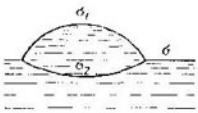
4.5.16. a) Demuéstrese que la presión debajo de una superficie cilíndrica de líquido con radio R es igual a σ/R (σ es la tensión superficial del líquido). Para la demostración, hágase uso de la condición de equilibrio para el volumen de líquido, yacente sobre el plano A.

b) Demuéstrese que la presión en este mismo líquido debajo de una superficie esférica de radio R es igual a $2\sigma/R$.

4.5.17. Determínense las presiones mínima y máxima dentro de una gota esférica de líquido que flota en otro líquido. El centro



Para el problema 4.5.17.



Para el problema 4.5.22*.

de la gota dista de la superficie del líquido h, el radio de la gota es R, las densidades de los líquidos son ρ y la tensión superficial en la superficie de separación de los líquidos es σ.

4.5.18. Un líquido moja cierta pared vertical (véase la figura para el problema 4.5.12). ¿Cómo depende el radio de la curvatura de la superficie del líquido con relación a la altura x a que se eleva el líquido sobre su nivel? La densidad y la tensión superficial del líquido son ρ y σ.

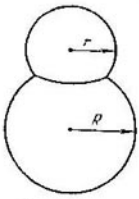
4.5.19. El radio exterior de una pompa de jabón es R y el grosor de la pared h. ¿Cuál es la presión del aire dentro de la pompa? ¿En la película del líquido? La presión del aire fuera de la pompa es igual a P.

4.5.20. Estímese ¿cuánta agua puede llevarse en una criba? La dimensión de la malla es de 1×1 mm^2 y el área de la criba es de 0,1 m^2. El agua no moja a la criba.

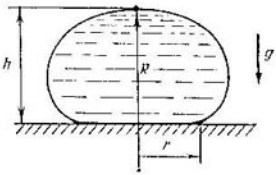
4.5.21*. Dos cuerpos ligeros, los dos que se mojan o bien ambos que no se mojan por el agua, flotando en la superficie de agua se atraen mutuamente. Pero si uno de los cuerpos se moja por el agua, en tanto que el segundo no, los cuerpos se repelen. Explíquese dicho fenómeno.

4.5.22*. Una pequeña gota de grasa flota en la superficie de un líquido con tensión superficial σ. La tensión superficial de la grasa en la superficie de separación aire — grasa es σ_1 y en la superficie de separación grasa — líquido, σ_2. Determínese el grosor de la gota si su radio es igual a r.

4.5.23. En una pompa de jabón de radio R «está sentada» otra pompa de radio r. ¿Qué radio de curvatura tiene la película que las



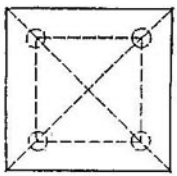
Para el problema 4.5.23.



Para el problema 4.5.24*.

divide? ¿Qué ángulos forman las películas en los lugares de su contacto?

4.5.24*. El radio de curvatura de una gota en su punto superior es R. ¿Cuál será la masa de la gota, si su altura es h y el radio de contacto de la misma con el plano horizontal en el que «está sentada» es igual a r? La densidad del líquido es ρ, la tensión superficial es igual a σ. El líquido no moja al plano.



Para el problema 4.5.25*.

4.5.25*. Sobre cuatro bolas de mercurio, yacentes en el plano horizontal, se pone con cuidado una placa cuadrada de la manera expuesta en la figura. El radio de las bolas es de 1 mm, la masa de la placa es igual a 80 g y la tensión superficial del mercurio es de 0,465 N/m. No hay mojabilidad.

a) ¿Cuánto distará del plano horizontal la superficie inferior de la placa?

b) Determínese la frecuencia de las oscilaciones verticales pequeñas de la placa.

4.5.26. ¿Qué trabajo contra las fuerzas de tensión superficial es necesario realizar con el fin de: a) dividir una gota esférica de mercurio con radio de 3 mm en dos gotas idénticas; b) aumentar dos veces el volumen de una pompa de jabón que tiene el radio de 1 cm?

§ 4.6. Fenómenos de capilaridad

4.6.1. a) Para eliminar de la superficie de un tejido una mancha de grasa se recomienda humedecer con algodón, empapado en gasolina, los bordes de la mancha, pero no la propia mancha. ¿Por qué?

b) A fin de que la cera para esquís se infiltre mejor en las botas de esquiar ¿cómo convendrá calentarlas: por afuera o por dentro?

4.6.2. Un tubo capilar de radio R se mete en un líquido con mojabilidad de tensión superficial σ y densidad ρ. Determínese la altura a que se elevará el líquido. Trácese la gráfica de la dependencia entre la presión en la columna de líquido en el tubo capilar y la distancia hasta el nivel del mismo en el recipiente. Determínese el trabajo que realizan las fuerzas de tensión superficial y la energía potencial del líquido en el tubo capilar. ¿Por qué estas magnitudes no coinciden?

4.6.3. ¿Qué error relativo admitimos al medir la presión atmosférica atendiéndonos a la altura de la columna de mercurio, si el diámetro interior del tubo barométrico es de 5 mm y la tensión superficial del mercurio es igual a 0,465 N/m?

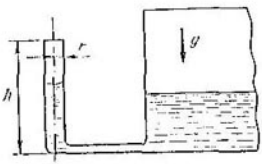
4.6.4. Tres tubos capilares contienen agua. En posición vertical de los tubos el agua forma unas columnas de longitud 2, 4 y 2,98 cm. El diámetro interno de los tubos capilares es de 1 mm. Hállense los radios de curvatura de los meniscos inferiores en cada uno de los tubos capilares, si la mojabilidad es completa.

4.6.5. Un capilar vertical de radio r y altura h se une mediante un tubo con cierto recipiente ancho. El nivel del líquido en el recipiente aumenta a velocidad v. ¿Cómo depende la diferencia de los niveles del líquido en el recipiente y en el capilar con respecto al tiempo? ¿Dentro de cuánto tiempo el líquido empezará a salir del capilar? La tensión superficial del líquido es σ; la densidad, ρ. La mojabilidad es completa.

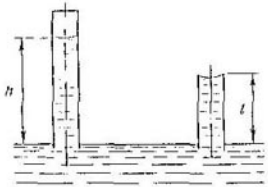
4.6.6. El líquido en el capilar largo asciende a la altura h. Hállese el radio de curvatura de la superficie del líquido en el extremo del capilar corto de longitud $l < h$. Los radios de los capilares son R y el ángulo de contacto es igual a 0.

4.6.7.*. Un capilar, que hasta la mitad contiene líquido, gira alrededor del eje OO'. La longitud del capilar es $2l$ y su radio es r. La densidad del líquido es ρ y la tensión superficial, σ. El líquido moja por completo al capilar. ¿A qué velocidad angular el líquido comenzará a salir del capilar?

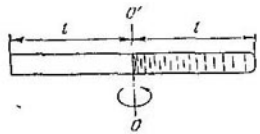
4.6.8. En un capilar, sumergido verticalmente en el agua a una profundidad l, el agua se eleva a la altura h. El extremo inferior del capilar se tapa, se saca éste del agua y se abre de nuevo. Determínese



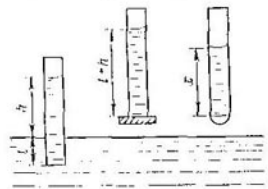
Para el problema 4.6.5.



Para el problema 4.6.6.



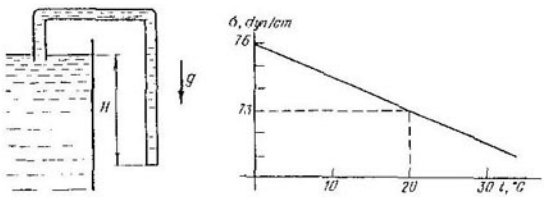
Para el problema 4.6.7*.



Para el problema 4.6.8.

la longitud de la columna que quedará en el capilar, si la mojabilidad es completa.

4.6.9*. En un recipiente con agua se mete un tubo capilar doblado de vidrio con un radio $r = 0{,}1$ mm. La dependencia entre la

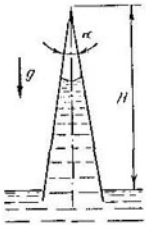


Para el problema 4.6.9*.

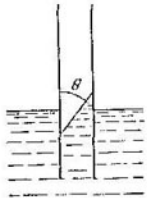
tensión superficial y la temperatura se da en la figura. ¿En qué intervalo de temperaturas el agua empezará a verterse del recipiente, si $H = 15$ cm?

4.6.10. ¿Hacia dónde se moverá una gota, de un líquido que moja y de otro que no moja, en un capilar cónico, yacente horizontalmente?

4.6.11. ¿A qué altura ascenderá el líquido por un tubo capilar cónico vertical con un ángulo en el vértice $\alpha \ll 1$? La densidad del líquido es ρ y la tensión superficial, σ. El líquido moja por completo al capilar. La altura del tubo capilar es H.



Para el problema 4.6.11.

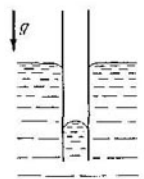


Para el problema 4.6.13.

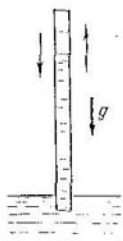
4.6.12. ¿A qué altura ascenderá un líquido entre dos placas verticales, que distan Δ, si el ángulo de contacto para la primera placa es θ_1 y para la segunda, θ_2? La densidad del líquido es ρ y la tensión superficial, σ.

4.6.13. ¿Qué fuerza actúa sobre dos placas cuadradas paralelas $a \times a$, sumergidas parcialmente en el líquido, si el ángulo de contacto en las superficies exteriores es de 90° y en las interiores es θ y $\pi - \theta$? La densidad del líquido es ρ y la tensión superficial, σ.

4.6.14*. ¿Con qué fuerza se atraen mutuamente dos placas paralelas $a \times a$, sumergidas parcialmente en un líquido, si éste no las



Para el problema 4.6.14*.



Para el problema 4.6.15*.

moja? La densidad del líquido es ρ, las placas distan Δ y la tensión superficial es σ.

4.6.15*. Hállese el período de oscilaciones verticales pequeñas del líquido en un capilar de radio r. La densidad del líquido es ρ y la tensión superficial, σ.

Capítulo 5

FISICA MOLECULAR

§ 5.1. Movimiento térmico de las partículas

5.1.1. Estímese la masa de la infusoria, sobre cuyo movimiento dirigido a velocidad de 1 μm/s, poco influye el movimiento térmico.

5.1.2. Estímense la energía cinética media y la velocidad media cuadrática de las partículas en la niebla con diámetro de 10 μm que se encuentran en el aire a una temperatura de 5 °C.

5.1.3. ¿En cuánto se diferencian las velocidades medias cuadráticas de dos partículas que realizan movimiento browniano en una gota de agua, si sus masas se diferencian 4 veces?

5.1.4. Determínese la desviación media cuadrática del péndulo, con respecto a la posición de equilibrio, provocada por el movimiento térmico de la bola del péndulo. La temperatura del aire es de 20 °C. La masa de la bola es igual a 1 mg y la longitud del hilo del péndulo es de 10 m.

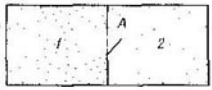
5.1.5*. El espejo de un galvanómetro está suspendido por un hilo de cuarzo. Un haz de rayos paralelo incide sobre el espejo y, reflejándose de él, va a parar a la pantalla. Estímese la dimensión de la mancha en la pantalla, si al girar el espejo en un ángulo φ por parte del hilo actúa un momento de la fuerza $N = -\varkappa\varphi$, donde $\varkappa = 1{,}38 \cdot 10^{-15}$ N·m. La temperatura del aire es de 300 K y la distancia hasta la pantalla es igual a 20 m. ¿Cómo cambiará la respuesta, si la temperatura desciende hasta 100 K?

5.1.6. Un recipiente está dividido en dos partes por un tabique poroso. En el volumen izquierdo se encuentra un gas de moléculas ligeras, en el derecho, de pesadas. Las presiones de los gases en los dos volúmenes eran iguales. Al cabo de cierto tiempo la presión en el volumen derecho aumentó. Luego, pasado un lapso más prolongado, las presiones en los volúmenes se igualaron. Explíquese este efecto.

5.1.7. En el volumen *1* se encuentra una mezcla de helio con hidrógeno. Las presiones del hidrógeno y helio son las mismas. El orificio *A* se abre para un tiempo corto. Determínese cuál será después de eso la relación de la presión del helio respecto a la presión del hidrógeno en el volumen *2*.

5.1.8*. Existen n volúmenes aislados iguales. En el volumen *1* se encuentra una misma cantidad de moléculas con masas moleculares μ_1 y μ_2. Para un tiempo corto se abren unos orificios pequeños idén-

ticos que unen los volúmenes vecinos como se muestra en la figura. Estímese después de eso la relación entre la cantidad de moléculas con masa molecular μ_1 y el número de moléculas con masa molecular μ_2 en el n-ésimo volumen.

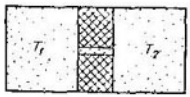


Para el problema 5.1.7.

Para el problema 5.1.8*.

5.1.9*. Un gas rarificado fluye a través de un orificio en la pared al vacío. Al cabo del tiempo τ en el recipiente quedó la mitad de las moléculas. Aumentamos las dimensiones del recipiente y del orificio n veces. ¿Dentro de cuánto tiempo, a partir del instante de apertura del orificio, en el volumen quedará la mitad de las moléculas?

5.1.10. Estímese en cuánto el flujo de gas que sale de un recipiente a través de un canal cilíndrico de radio R y longitud L es menor que el flujo que sale a través de un orificio de radio R. Considérese que las paredes del canal absorben las moléculas y que $R \ll L$.



Para el problema 5.1.11*.

5.1.11*. Dos volúmenes iguales V se unen mediante un canal estrecho. En los volúmenes hay una cantidad pequeña de partículas N (son tan pocas las partículas que casi no chocan unas con otras). ¿Cuántas partículas contendrá cada uno de los volúmenes, si la temperatura del primer volumen es T_1 y del segundo, $T_2 > T_1$? ¿Qué presiones habrá en estos volúmenes. En el canal colocamos una banderita ligera. ¿Hacia dónde se desviará ésta?

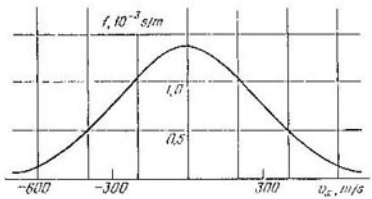
§ 5.2. Función de distribución

5.2.1. En 1 cm³ a presión de 0,1 MPa hay $2{,}7 \cdot 10^{19}$ moléculas de nitrógeno que se mueven en distintas direcciones y con diferentes velocidades. La cantidad de moléculas, cuyas componentes verticales de las velocidades yacen en el intervalo de 999 ... 1001 m/s, es igual a $1{,}3 \cdot 10^{12}$.

a) ¿Qué cantidad de semejantes moléculas contendrá un litro de nitrógeno?

b) ¿Cuántas moléculas de nitrógeno que se mueven verticalmente en los intervalos de velocidades de $1000 \pm 0{,}1$ y 1000 ± 10 m/s habrá en 1 m³, si se considera que el número de moléculas es proporcional al intervalo de las velocidades?

c) La cantidad de moléculas, cuyas componentes de las velocidades a lo largo de cierta dirección asignada yacen en un intervalo determinado, no depende de las componentes de las velocidades de estas mismas moléculas en otras direcciones. Haciendo uso de ello, determínese: la cantidad de moléculas de nitrógeno en 1 cm³, cuyas componentes horizontales de las velocidades, lo mismo que las verticales, pertenecen al intervalo de 999...1001 m/s; el número de



Para el problema 5.2.2.

moléculas, cuyas componentes horizontales de las velocidades se encuentran en el intervalo de 1000 ± 0,1 m/s y las verticales, en el intervalo de 1000 ± 2 m/s.

5.2.2. La cantidad de moléculas de un gas perfecto dN, cuyas componentes de las velocidades a lo largo de un eje arbitrario x yacen en el intervalo de $(v_x, v_x + dv_x)$, se determina por la distribución de Maxwell

$$dN = N \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2kT}\right\} dv_x,$$

donde m es la masa de la molécula; N, la cantidad total de moléculas; k, la constante de Boltzmann y T, la temperatura absoluta. La función

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2kT}\right\}$$

se denomina función de distribución. En la figura se muestra la función de distribución de las moléculas de nitógeno a temperatura ambiente ($T = 293$ K). Haciendo uso de la gráfica, hállese: a) cuántas moléculas de nitrógeno, con componentes verticales de las velocidades desde 499 hasta 501 m/s, contiene 1 cm³ de aire; b) cuántas moléculas de nitrógeno, con componentes verticales de velocidades desde 498 hasta 502 m/s, hay en 1 m³ de aire. La presión del aire es de 0,1 MPa.

5.2.3. Hállese la relación entre la cantidad de moléculas de hidrógeno, cuyas componentes de las velocidades a lo largo del eje x yacen en un intervalo de 3000 a 3010 m/s, y el número de moléculas de hidrógeno que tienen a lo largo de ese mismo eje componentes

de las velocidades de 1500 a 1505 m/s. La temperatura del hidrógeno es de 300 K.

5.2.4. Hállese la relación entre la cantidad de moléculas de hidrógeno con componentes de las velocidades: a lo largo de x 3000 ... ... 3010 m/s, a lo largo de y 3000 ... 3010 m/s, a lo largo de z 3000 .. ... 3002 m/s, y el número de moléculas de hidrógeno con componentes de las velocidades: a lo largo de x 1500 ... 1505 m/s, a lo largo de y 1500 ... 1501 m/s y a lo largo de z 1500 ... 1502 m/s. La temperatura del hidrógeno es de 300 K.

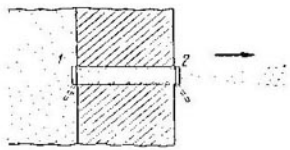
5.2.5. Imaginémonos que se logró fotografiar en una película cierto gas a temperatura T. La función de distribución de las moléculas según las velocidades es $f(v)$.

a) Hállese la función de la distribución de las «partículas» según las velocidades, si la imagen se proyecta sobre una pantalla con aumento l.

b) La velocidad con que se desplaza la película aumentó l veces. Hállese la función de distribución de las «partículas» según las velocidades en este caso.

5.2.6. En la pared de un recipiente con gas rarificado, que se encuentra en un volumen grande vacío, se practica un pequeño orificio. ¿Cómo variará la temperatura del gas en el recipiente?

5.2.7*. En una pared gruesa de cierto recipiente con gas se hace un canal recto de longitud l que une el recipiente con el volumen rarificado. Para formar un haz corto de partículas el canal está dotado de dos chapeletas que pueden abrirse para un tiempo corto. La válvula *1* se halla en la salida del canal hacia el recipiente y la válvula *2*, en la salida del canal al volumen. El haz de partículas se obtiene de la siguiente manera: primero durante el tiempo τ se abre la chapeleta *1* y luego, después de que ésta se cierre, pasado el tiempo t se abre la chapeleta *2* durante el tiempo τ. Las partículas, que durante este período pasaron al canal, forman en el volumen rarificado un haz. ¿Qué longitud tendrá el haz dentro del tiempo τ_1 después de cerrar la chapeleta *2*?

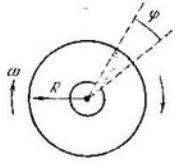


Para el problema 5.2.7*.

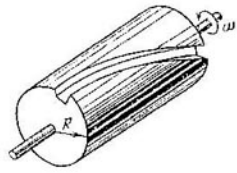
5.2.8. Un proyector molecular crea un haz estrecho en forma de cinta de átomos de plata que van a parar a la superficie interna de un cilindro de radio $R = 30$ cm y se precipitan en ella en forma de una mancha. El dispositivo gira a la velocidad angular $\omega = 100\pi\ s^{-1}$. Determínese la velocidad del haz molecular, si la mancha se desvió en un ángulo $\varphi = 0{,}314$ rad con relación a la posición inicial.

5.2.9. En la superficie del cilindro viene cortado un canal

helicoidal estrecho con paso h. De una parte del extremo del cilindro se encuentra cierto gas rarificado y de la otra, el vacío. Las moléculas del gas se absorben fácilmente por las paredes del canal. El cilindro



Para el problema 5.2.8.



Para el problema 5.2.9.

gira a la velocidad angular ω. ¿Qué velocidades tendrán las moléculas que atraviesan el canal?

5.2.10*. En cierto haz de partículas las velocidades tienen una misma dirección y se encuentran en el intervalo $(v, v + \Delta v)$, $\Delta v \ll v$. La unidad de volumen del haz contiene n partículas, la masa de cada una es m.

a) Durante el tiempo τ sobre las partículas en dirección de su movimiento actuó la fuerza F. Determínense las velocidades y la cantidad de partículas en unidad de volumen después de la acción de dicha fuerza.

b) Determínense las velocidades y la cantidad de partículas en unidad de volumen después de pasar la zona donde, a la distancia l a lo largo del sentido del movimiento, la fuerza F actuó sobre las partículas.

5.2.11*. Supongamos que se crea un haz dirigido de moléculas con la siguiente función de distribución

$$f(v_x) = \sqrt{\alpha/\pi}\exp(-\alpha v_x^2).$$

La masa de la molécula es m. ¿Cómo cambiarán la función de distribución y la cantidad de moléculas en unidad de volumen, si el haz pasa una zona de anchura l donde sobre cada molécula actúa una fuerza de frenado F?

5.2.12. A la altura de 3 km, 1 cm³ de aire contiene unas 10^2 partículas de polvo, en tanto que junto a la superficie terrestre, aproximadamente 10^5. Determínese la masa media de una partícula de polvo y estímese su tamaño, suponiendo que la densidad de dicha partícula es de 1,5 g/cm³. La temperatura del aire es de 27 °C.

5.2.13. En las inmediaciones de la superficie terrestre la cantidad de moléculas de helio es unas 10^5 veces, y la de hidrógeno casi 10^6 veces menor que el número de moléculas de nitrógeno. ¿A qué altura la cantidad de moléculas de helio y de hidrógeno será igual al

número de moléculas de nitrógeno? Considérese que la temperatura media de la atmósfera es igual a 0 °C.

5.2.14*. a) La evaporación de un líquido puede considerarse como el «escape» a partir de su superficie de aquellas moléculas, que tienen una energía cinética, en dirección normal a la superficie del mismo, superior a la energía de enlace para las moléculas en el líquido. La evaporación del líquido «cesa» cuando la cantidad de moléculas «que se escapan» se iguala a la cantidad de moléculas que llegan al líquido de la fase gaseosa. El gas, que consta de las mismas moléculas que el líquido, lleva el nombre de «vapor saturado», si éste se encuentra en equilibrio con el líquido. Estímese, haciendo uso de dicho modelo, el número de partículas en unidad de volumen del vapor saturado a la temperatura T, si el calor molar de evaporación del líquido es q y la cantidad de partículas en unidad de volumen de líquido, n_0. Las partículas en el líquido y en la fase gaseosa tienen la distribución de Maxwell según las velocidades.

b) A 100 °C el calor molar de evaporación del agua es cerca de $4 \cdot 10^4$ J/mol. 1 cm³ de vapor saturado contiene $2 \cdot 10^{19}$ partículas. ¿Qué resultado nos ofrecerá el problema a)? ¿A qué temperatura la cantidad de partículas en 1 cm³, calculado según la fórmula, será igual a $2 \cdot 10^{19}$?

§ 5.3. Colisión de las moléculas. Fenómenos de transferencia

5.3.1. A presión atmosférica y temperatura de 0 °C la longitud del recorrido libre de las moléculas de hidrógeno es de 0,1 μm. Estímese el diámetro de las moléculas de hidrógeno.

5.3.2. Estímese la longitud del recorrido libre de las moléculas de nitrógeno en el aire a condiciones normales. El radio de las moléculas de nitrógeno y oxígeno tómese igual a 0,2 nm.

5.3.3. Estímese cuántas veces durante un segundo en 1 cm³ de aire las moléculas de nitrógeno chocan entre sí y con las moléculas de oxígeno.

5.3.4. a) Un gas perfecto se calienta a presión constante. ¿Cómo cambian la longitud del recorrido libre l y la cantidad de colisiones ν de una molécula individual en la unidad de tiempo en función de la temperatura?

b) El gas se comprime de modo isotérmico. Hállese la dependencia de l y ν con respecto a la presión.

c) El gas se comprime de modo adiabático. Hállese la dependencia de l y ν con respecto a la presión. El índice de la adiabática es γ.

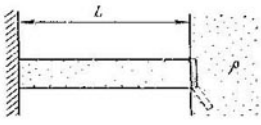
5.3.5. Cierto volumen contiene una mezcla de dos gases. La unidad de volumen de la mezcla está constituida por n_1 moléculas de un gas y n_2 de otro. Los radios de las moléculas son R_1 y R_2. Estímese la longitud del recorrido libre de las moléculas de dichos gases.

5.3.6*. En condiciones normales, 1 cm³ de hidrógeno atómico contiene $2{,}7 \cdot 10^{19}$ átomos. Estímese el tiempo, durante el cual una décima parte de los átomos de hidrógeno se convierte en moléculas de este mismo. Considérese que cada colisión de dos átomos de hidrógeno conduce a la formación de una molécula. El radio de los átomos de hidrógeno es de 0,06 nm.

5.3.7. a) El contenido relativo de átomos radiactivos en el gas es pequeño. Su cantidad en la unidad de volumen crece linealmente con la altura: $n = \alpha h$. La masa del átomo es m; la longitud de recorrido libre, l y la temperatura de los átomos es T. Estímese la densidad del flujo de dichos átomos sobre la Tierra.

b) Estímese el coeficiente de difusión para los vapores de agua a través del aire a 20 °C. El radio de las moléculas de agua es de 0,21 nm. Los radios de las moléculas de nitrógeno y oxígeno es de 0,18 nm.

5.3.8. Los coeficientes de difusión de las moléculas A a través de los gases B_1 y B_2 son iguales a D_1 y D_2, si la unidad de volumen de estos gases contiene n partículas. Hállese el coeficiente de difusión de las moléculas A a través de una mezcla, cuya unidad de volumen contiene n_1 moléculas del gas B_1 y n_2 moléculas del gas B_2.



Para el problema 5.3.9*.

5.3.9*. En un recipiente fino de longitud L y sección S se encuentra aire seco, aislado mediante una chapeleta del aire, saturado de vapor de agua. La pared izquierda del recipiente puede congelar el agua. La chapeleta se retira.

a) Estímese el tiempo durante el que se establece el estado estacionario del vapor.

b) Determínese la masa de agua que se congelará en unidad de tiempo, cuando en el recipiente se establezca un flujo estacionario.

El coeficiente de difusión de los vapores saturados es D y la densidad, ρ.

5.3.10. a) A pesar de que la temperatura del gas aumenta linealmente con la altura h ($T = T_0 + \alpha h$), la variación relativa de la temperatura $\alpha h/T_0$ sigue siendo mucho menor que la unidad. La longitud del recorrido libre de las moléculas del gas es l, la masa de cada molécula es m y la cantidad de moléculas en unidad de volumen, n. Estímese la densidad del flujo térmico sobre la Tierra. ¿Cambiará la densidad de este flujo si aumentamos la cantidad de moléculas en la unidad de volumen del gas?

b) ¿En cuántas veces la conductibilidad térmica del hidrógeno es mayor que la del aire? El radio de las moléculas de hidrógeno es de 0,14 nm, el de las moléculas de nitrógeno y oxígeno, de 0,18 nm. Las temperaturas de los gases son iguales.

5.3.11*. Las conductibilidades térmicas de los gases A_1 y A_2

son iguales a $\varkappa_1$ y $\varkappa_2$. Determínese la conductibilidad térmica de una mezcla en la que la cantidad de moléculas del gas A_1 supera α veces la cantidad de moléculas del gas A_2. Las temperaturas de los gases son iguales, además los gases son monoatómicos. Las masas moleculares de los gases son μ_1 y μ_2.

5.3.12. Un cuerpo caliente se enfría en un gas rarificado durante el tiempo t. ¿En cuánto tiempo se enfriará un cuerpo del mismo material, si aumentamos todas sus dimensiones lineales n veces?

§ 5.4. Gases enrarecidos. Interacción de las moléculas con la superficie de un sólido[1])

5.4.1. Estímese cuántas colisiones por parte de las moléculas del aire soporta 1 cm² de la pared de su habitación durante 1 s. ¿Qué impulso se transmite a la pared en el transcurso de 1 s?

5.4.2. ¿En cuánto cambiará la presión del gas, si la k-ésima parte de las moléculas que chocan contra la pared, de repente empezase a absorberse por ella?

5.4.3. En un gas enrarecido se mueve, a velocidad constante v, una esfera de radio R. La cantidad de moléculas en unidad de volumen es n, la masa de la molécula es m y las velocidades térmicas de las moléculas son considerablemente inferiores a la velocidad de la esfera. Estímese la resistencia que actúa sobre la esfera.

5.4.4. ¿Por qué los meteoritos se calientan al rojo en la atmósfera de la Tierra?

5.4.5. En un gas rarificado con masa molecular μ se mueve un disco de radio a con una velocidad u, dirigida a lo largo del eje del disco. Estímese la resistencia que actúa sobre el disco. La velocidad del disco es mucho menor que la velocidad térmica de las moléculas. La presión del gas es P y la temperatura, T.

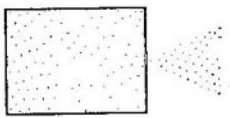
5.4.6. En un recipiente cerrado se halla cierto gas a presión P. En la pared del recipiente hay un orificio de área σ, cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la longitud del recorrido libre de las moléculas de gas. Determínese la fuerza de reacción F que soporta el recipiente al salir el gas al vacío.

5.4.7. En un gas enrarecido con masa molecular μ se mueve una placa fina y plana de la manera expuesta en la figura. Estímese qué fuerza es necesario aplicar a la placa para que se mueva con la velocidad constante u. El área de la placa es S; la presión del gas, P y la temperatura, T. La velocidad de la placa es pequeña en comparación con la velocidad térmica de las moléculas.

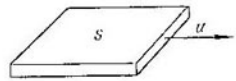
---

[1]) En el presente párrafo para la estimación considérese que las moléculas en el gas rarificado (enrarecido) (la longitud del recorrido libre de las moléculas es mucho mayor que las dimensiones características del sistema) parten de la superficie del sólido con la velocidad media cuadrática, correspondiente a la temperatura de éste.

5.4.8. En un volumen, en el que se puede variar la presión del gas, se encuentran dos discos paralelos. Uno de ellos está suspendido de un hilo elástico y el otro, gira. El ángulo de torsión del primer disco era φ_1 a presión P. Al aumentar la presión del gas, el ángulo de torsión al principio aumentó y luego, alcanzando el valor φ_2, cesó de depender de la presión. Explíquese este efecto.



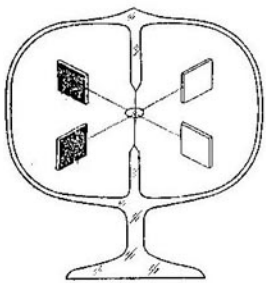
Para el problema 5.4.6.



Para el problema 5.4.7.

5.4.9. Entre dos cilindros coaxiales largos de radios r y R se encuentra un gas enrarecido. El cilindro interior gira a velocidad angular constante ω. Estímese la velocidad angular estacionaria del cilindro exterior.

5.4.10. Unas placas ligeras de mica con superficie lisa y brillante se han ennegrecido por una parte y fijado en el eje de rotación de la manera mostrada en la figura. Después este sistema se coloca en un recipiente de vidrio del que se evacua parcialmente el aire. Si ahora dicho recipiente se pone en un local muy iluminado, el sistema comenzará a girar en sentido de las agujas del reloj, con la particularidad de que con tanta mayor rapidez, cuanta más luz haya en el local. Así, pues, hemos confeccionado un radiómetro o dispositivo para medir la intensidad de la radiación lumínica. Explíquese el principio de funcionamiento de este dispositivo.



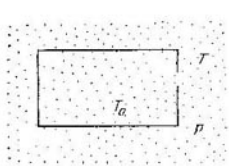
Para el problema 5.4.10.

5.4.11*. Estímese la sustentación de una lámina con área de 1 m², cuya superficie inferior (intradós) se encuentra a temperatura de 100 °C y la superior (trasdós), a 0 °C. La temperatura del aire es de 20 °C y la presión, de 0,1 Pa.

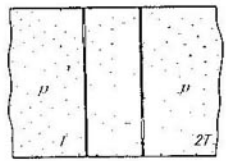
5.4.12. Estímese, según el orden de la magnitud, la velocidad estacionaria con que se moverá en el aire muy enrarecido un disco plano, una de las superficies del cual está calentada hasta la temperatura de 310 K y la otra, hasta 300 K. La temperatura del aire es de 300 K.

5.4.13*. Dos láminas idénticas y paralelas de área S se encuentran en un recipiente una junto a la otra; sus temperaturas son T_1 y T_2 y la temperatura de las paredes del recipiente, T_3. Las láminas se repelen mutuamente con una fuerza F. Estímese la presión del gas rarificado en el recipiente.

5.4.14*. En el volumen se mantiene la temperatura T_0. Fuera del volumen se encuentra cierto gas con presión P y temperatura T.



Para el problema 5.4.14*.



Para el problema 5.4.15*.

¿Qué presión tendrá el gas dentro del volumen, si éste está unido con el gas ambiente mediante un orificio pequeño. Los gases están enrarecidos.

5.4.15*. Una cavidad termoaislada está unida mediante pequeños orificios iguales con dos volúmenes que contienen helio gaseoso. Las presiones del gas en ambos volúmenes se mantienen idénticas e iguales a P y la temperatura en uno de ellos es T y en el otro, $2T$. Hállense la presión y temperatura que se establecerán dentro de la cavidad. Los gases están enrarecidos.

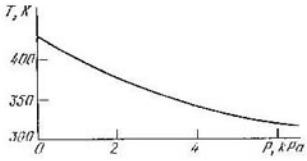
5.4.16*. Entre dos placas planas y paralelas, que distan δ una de la otra, se encuentra cierto gas enrarecido (la longitud del recorrido libre de las moléculas $l \gg \delta$). Estímese la densidad del flujo de calor, si las temperaturas de las placas se mantienen iguales a T y $T + \Delta T$. La unidad de volumen del gas contiene n moléculas. El índice de la adiabática es γ.

5.4.17. En un manómetro térmico la presión del gas se determina ateniéndose a la temperatura del elemento térmico, en el que en unidad de tiempo se desprende siempre una misma cantidad de calor. La figura muestra la gráfica de la dependencia entre la temperatura del elemento y la presión del nitrógeno. Haciendo uso de esta gráfica ¿cómo se puede obtener una curva análoga para el hidrógeno?

5.4.18. Estímese la masa de aire líquido que se evapora en el transcurso de una hora de una vasija de Dewar mal rarificada, si la presión del aire (a temperatura ambiente de 293 K) que quedó entre las paredes, es igual a 0,133 Pa. La superficie de la vasija es de 600 cm^2, el calor específico de evaporación del aire es de 0,2 MJ/kg y su temperatura, 81 K. El huelgo entre las paredes de la vasija es

pequeño en comparación con la longitud del recorrido libre de las moléculas.

5.4.19. Dos láminas paralelas se encuentran en un gas enrarecido a una distancia pequeña en comparación con sus dimensiones. Entre



Para el problema 5.4.17.

las láminas se colocan N tabiques-pantallas finos y de buena conductibilidad térmica. ¿Cómo cambiará la conductibilidad térmica entre las láminas?

5.4.20*. Un flujo térmico Q_1 surge a causa de una pequeña diferencia en temperaturas entre dos placas paralelas en cierto gas enrarecido, en cuya unidad de volumen hay n partículas. Al elevar la presión del gas, el flujo térmico primero aumenta y luego, después de alcanzar cierta magnitud Q_2, cesa de depender de la presión del gas. Explíquese dicho efecto. Estímese el radio de las moléculas de gas. La distancia entre las placas es δ.

§ 5.5. Ecuación de estado del gas perfecto

5.5.1. El volumen de un gas se reduce a la mitad, mientras que la temperatura aumenta 1,5 veces. ¿En cuánto aumentará la presión del gas?

5.5.2. Para disminuir isotérmicamente n veces el volumen de gas en un cilindro con émbolo, sobre este último se coloca una carga de masa m. ¿Qué carga es necesario añadir para que el volumen de gas disminuya isotérmicamente k veces más?

5.5.3. Una botella con volumen de 50 l se llena de aire a 27 °C hasta obtener la presión de 10 MPa. ¿Qué volumen de agua se podrá desalojar de la cisterna de un submarino mediante el aire de dicha botella, si el desplazamiento se efectúa a una profundidad de 40 m? La temperatura del aire después de la expansión es de 3 °C.

5.5.4. ¿Por qué los depósitos para emerger en el batiscafo, por lo general, se llenan no de aire, sino de keroseno?

5.5.5. Cierto gas se encuentra en un recipiente a presión de 2 MPa y temperatura de 27 °C. Después de calentar el recipiente en 50 °C, en él queda solamente la mitad del gas (en masa). Determínese la presión estacionaria.

5.5.6. La presión del aire dentro de una botella es igual a 0,1 MPa a la temperatura de 7 °C. ¿En cuánto es necesario calentar la botella para que salte el corcho? Cuando la botella permanece sin calentar, el corcho puede sacarse aplicando una fuerza de 10 N. La sección del corcho es de 2 cm².

5.5.7. ¿Por qué la bombilla eléctrica se llena con gas inerte que posee una presión bastante menor que la atmosférica?

5.5.8. En un tubo estrecho vertical de longitud $2L$ el extremo inferior está soldado y el superior está abierto, comunicándose con la atmósfera. En la mitad inferior del tubo se encuentra cierto gas a temperatura T_0, mientras que la mitad superior hasta el tope está ocupada por mercurio. ¿Hasta qué temperatura mínima es necesario calentar el gas en el tubo para que aquél desplace todo el mercurio? La presión exterior (en mm de la columna de Hg) es igual a L. Menospréciese la tensión superficial.

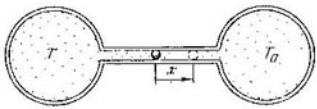
5.5.9. ¿Efectuando cuántas carreras de émbolo de una bomba con volumen de trabajo V, se puede elevar la presión desde la atmosférica P_0 hasta P en un recipiente de volumen V_0? Menospréciese el calentamiento del gas.

5.5.10. ¿Efectuando cuántas carreras de émbolo de una bomba con volumen de trabajo V, se puede rarificar un recipiente de volumen V_0 desde la presión P_0 hasta P?

5.5.11. ¿En cuánto variará la sustentación de un globo, si sustituimos el helio que contenía por hidrógeno? Menospréciese el peso de la envoltura del globo.

5.5.12*. La chimenea de una fábrica con altura de 50 m expulsa el humo a la temperatura de 60 °C. Determínese la diferencia de presiones en la chimenea que asegure el tiro. La temperatura del aire es de — 10°C y la densidad del aire, 1,29 kg/m³.

5.5.13. El termómetro de gases consta de dos recipientes idénticos con gas de volumen V_0 cada uno, unidos por un tubo de longitud l

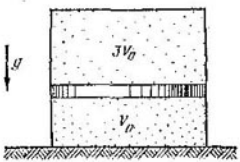


Para el problema 5.5.13.

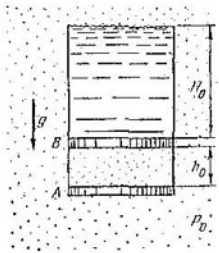
y sección S. Una gota de mercurio obstruye el tubo. Si las temperaturas de los gases en los volúmenes son iguales, el mercurio se encontrará en el centro del tubo. El volumen derecho se coloca en un termostato con temperatura T_0. Gradúese el termómetro, buscando la dependencia entre la temperatura del gas en el volumen izquierdo y el desplazamiento x del mercurio con respecto a la posición de equilibrio.

5.5.14. Dos volúmenes de 200 y 100 cm³ están separados por un émbolo móvil sin conductibilidad térmica. Primero la temperatura del gas era de 300 K y la presión, 1013 gPa, luego el volumen pequeño se sometió al enfriamiento mediante hielo hasta 273 K, mientras que el grande se caldeó mediante vapor hasta 373 K. ¿Qué presión se establecerá en los volúmenes?

5.5.15. En un recipiente cilíndrico se encuentra en equilibrio un émbolo pesado. Por encima del émbolo y por debajo de él se hallan masas iguales de gas a temperatura idéntica. La relación entre el volumen superior y el inferior es igual a 3. ¿Cuál será la relación de los volúmenes si aumentamos la temperatura del gas al doble?



Para el problema 5.5.15.



Para el problema 5.5.16.

5.5.16. En el cilindro por encima del émbolo A se encuentra un gas, cerrado por el émbolo B, sobre el cual hasta el límite superior del cilindro se vierte cierto líquido de densidad ρ. ¿A qué distancia x es necesario desplazar hacia arriba el émbolo A para que sobre el émbolo B quede una columna de líquido de altura H? Menospréciense la masa del émbolo B y la fricción entre él y las paredes. La presión atmosférica es P_0, las alturas iniciales de la columna de líquido son H_0 y de la columna de gas, h_0. La temperatura del gas durante el desplazamiento del émbolo no varía.

5.5.17. Sobre la superficie de un líquido de densidad ρ flota un vaso cilíndrico de paredes delgadas, sumergido hasta la mitad en el líquido.

a) ¿En cuánto se hundirá en el líquido el borde inferior del vaso, si éste se coloca sobre la superficie del líquido con el fondo hacia arriba? La altura del vaso es h y la presión del aire, P_0.

b) ¿A qué profundidad es necesario sumergir el vaso invertido para que él junto con el aire que contiene dentro se hunda?

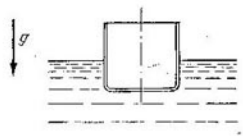
5.5.18*. Un depósito cerrado herméticamente está lleno de líquido, sólo que en su fondo hay una burbuja de aire. La presión sobre el fondo del depósito es P_0. ¿Cuál será la presión, si la burbuja

asciende a la superficie? La profundidad del depósito es H y la densidad del líquido, ρ.

5.5.19*. Un depósito cerrado herméticamente de 3 m de altura está lleno de agua, sólo que en su fondo hay dos burbujas iguales de aire. La presión sobre el fondo del depósito es de 0,15 MPa. ¿Cuál será la presión si emerge una burbuja? ¿Si emergen las dos burbujas?

5.5.20. Hállese la fórmula de un compuesto de nitrógeno y oxígeno, si un gramo de este compuesto en estado gaseoso en un volumen de 1 l a temperatura de 17 °C crea la presión de 314 gPa.

5.5.21. A temperatura ambiente el tetróxido de nitrógeno disocia parcialmente en dióxido de nitrógeno: $N_2O_4 \rightleftarrows 2NO_2$. En un volumen rarificado de 250 cm³ se introducen 0,92 g de N_2O_4 puro a 0 °C. Cuando la temperatura en el recipiente sube hasta 27 °C, el líquido se evapora totalmente y la presión se hace igual a 128 kPa. Determínese la parte del tetróxido de nitrógeno que ha disociado.



Para el problema 5.5.17.

5.5.22. Una pompa de jabón llena de aire caliente, queda suspendida inmóvilmente en la atmósfera (su presión y temperatura son P_0 y T_0). La densidad de la película de jabón es ρ, el grosor δ y el radio, $r \gg \delta$. Hállese la temperatura del aire dentro de la pompa. La tensión superficial de la película es σ y la masa molecular del aire, μ.

5.5.23. Dos pompas de jabón con radios r_1 y r_2 se unen formando una. Hállese la tensión superficial de la película de jabón, si el radio de la pompa que se formó es r y la presión atmosférica, P.

5.5.24. Hállese el período de vibraciones pequeñas de un émbolo con masa m en un recipiente cilíndrico liso de sección S. Por las dos partes del émbolo se encuentra cierto gas con los siguientes parámetros: P_0, $V_0 = Sl$ y T_0. Considérese que el proceso es isotérmico.

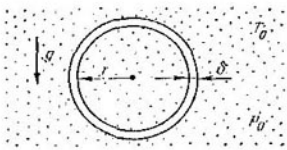
§ 5.6. Primer principio de la termodinámica. Capacidad calorífica

5.6.1. La energía media de una molécula de gas en un amplio intervalo de temperatura se determina con suficiente precisión mediante la fórmula $\overline{\varepsilon} = (i/2)\,kT$, donde i es la cantidad de grados de libertad de la molécula que es igual al número de coordenadas que establecen la posición de la molécula. Hállese, haciendo uso de dicha fórmula, la energía media de las moléculas H_2, N_2, H_2O, CH_4 a la temperatura T.

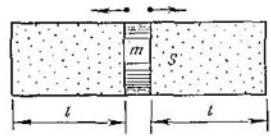
5.6.2. ¿Cuál es la energía interna a condiciones normales para 1 cm³ de aire y para 1 kg de aire?

5.6.3. El aire en la habitación se calienta desde la temperatura T_0 hasta T. La presión no cambia. ¿Cómo cambió la energía interna del aire dentro de la habitación?

5.6.4. En el volumen V_1 se encuentra un gas monoatómico a presión P_1 y temperatura T_1, mientras que en el volumen V_2, un gas monoatómico a presión P_2 y temperatura T_2. ¿Qué presión



Para el problema 5.5.22.



Para el problema 5.5.24.

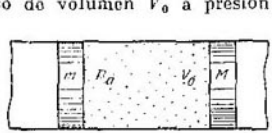
y temperatura se establecerán en estos volúmenes después de unirlos? Los volúmenes están termoaislados del espacio circundante.

5.6.5. En un recipiente termoaislado a temperatura de 800 K se encuentra 1 mol de CO_2 y 1 mol de H_2. Transcurre la reacción química

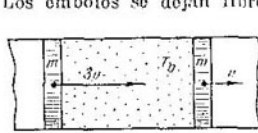
$$CO_2 + H_2 = CO + H_2O + 40{,}1 \text{ kJ/mol}.$$

¿En cuánto aumentará la presión en el recipiente una vez que termine la reacción?

5.6.6. En un tubo termoaislado liso e infinito se encuentran dos émbolos con masas M y m, entre los cuales hay un gas monoatómico de volumen V_0 a presión P_0. Los émbolos se dejan libres.



Para el problema 5.6.6.



Para el problema 5.6.7.

Estímense sus velocidades máximas. Menospréciese la masa del gas en comparación con las masas de los émbolos.

5.6.7. En un tubo termoaislado largo entre dos émbolos idénticos con masas m se encuentra 1 mol de gas monoatómico a temperatura T_0. En el instante inicial las velocidades están dirigidas en un mismo sentido y son iguales a $3v$ y v. ¿Hasta qué temperatura máxima se calentará el gas? Los émbolos no conducen el calor. Menospréciese la masa del gas en comparación con las masas de los émbolos.

5.6.8. Estímese la velocidad con que sale la bala de un cartucho, arrojado a una hoguera.

5.6.9. Explíquese por qué la expansión de un gas a temperatura constante (expansión isotérmica) puede efectuarse solamente al suministrar calor al gas.

5.6.10. El volumen de gas aumenta al doble: una vez de modo isotérmico y la otra, de modo isobárico. ¿En cuál de estos dos casos el gas efectúa mayor trabajo?

5.6.11. ¿Por qué se calienta la bomba al inflar un neumático?

5.6.12. En cierto cilindro un émbolo móvil encierra un volumen V con presión P. El émbolo se deja libre. ¿Qué trabajo ejecutará el gas sobre el émbolo, si el volumen del gas, al desplazarse el émbolo, aumenta al doble, en tanto que la presión del gas en este caso: a) permanece constante; b) crece linealmente hasta la presión $2P$ a medida que aumenta el volumen?

Para el problema 5.6.12.

5.6.13. En la figura se da la gráfica de la dependencia entre la presión del gas y el volumen. Hállese gráficamente el trabajo que realiza el gas durante la expansión de 2 a 6 l.

5.6.14. El aire se dilata isotérmicamente desde 2 hasta 10 l. La presión inicial es de 0,8 MPa. Determínese el trabajo que realizó el gas, recurriendo a los métodos gráfico y analítico.

Para el problema 5.6.13.

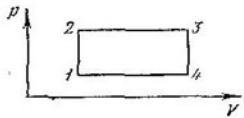
5.6.15. Cierto gas que ocupaba un volumen de 2 l a presión de 0,1 MPa se dilató isotérmicamente hasta 4 l. Después de eso, enfriando el gas de modo isocórico (a volumen constante), redujeron la presión a la mitad. A continuación, el gas de nuevo lo dilataron isobáricamente hasta ocupar 8 l. Hállese el trabajo realizado por el gas. Trácese la gráfica de la dependencia entre la presión y el volumen.

5.6.16. Un mol de hidrógeno se calienta a presión constante desde 0 °C. ¿Qué cantidad de calor es necesario comunicar al gas para que su volumen aumente al doble? ¿Qué trabajo realizará el gas en este caso?

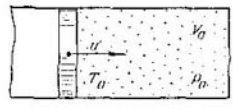
5.6.17. Sobre un mol de gas se realiza un ciclo cerrado que consta de dos isocoras y dos isobaras. Las temperaturas en los puntos 1

y 3 son T_1 y T_3. Determínese el trabajo que efectúa el gas durante dicho ciclo, si se sabe que los puntos 2 y 4 yacen en una isoterma.

5.6.18. El émbolo de masa M, que encierra el volumen V_0 con un gas monoatómico a presión P_0 y temperatura T_0, se mueve a la velocidad u. Determínense la temperatura y el volumen del gas



Para el problema 5.6.17.



Para el problema 5.6.18.

durante la compresión máxima. El sistema está termoaislado. Menospréciense las capacidades caloríficas del émbolo y el recipiente.

5.6.19*. En un espacio rarificado permanece verticalmente un recipiente cilíndrico, tapado por arriba mediante un émbolo móvil de masa M. Dentro del volumen cerrado se encuentra un gas monoatómico a temperatura T y presión P. La sección interior del cilindro es S, la altura del volumen dentro del que se encuentra el gas, es H. El émbolo se deja libre y empieza a moverse. ¿Qué velocidad máxima desarrollará el émbolo, si el gas se comprime mediante el émbolo de modo isotérmico y de modo adiabático? La aceleración de la gravedad es g.

5.6.20*. Dos compresores elevan la presión adiabáticamente de un gas biatómico. Primero funciona un compresor que reduce el volumen del gas V_0 hasta el volumen intermedio V_1. Luego el gas comprimido se enfría hasta la temperatura inicial, después de lo cual empieza a trabajar el segundo compresor que reduce el volumen del gas hasta V_2. ¿Para qué volumen V_1 el trabajo total de los dos compresores será el mínimo y cuál será su valor? Considérese que los volúmenes V_0 y V_2 están prefijados; la presión inicial del gas es P_0. ¿El trabajo de qué compresor resultará mayor para V_1 óptimo?

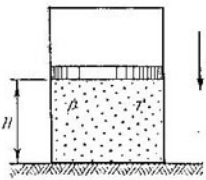
5.6.21. 1 m³ de hidrógeno a 0 °C se encuentra en un recipiente cilíndrico, cerrado por arriba con un émbolo de masa de 1 t y sección de 0,5 m², que se desliza fácilmente. La presión atmosférica es de 973 gPa. ¿Qué cantidad de calor se necesita para calentar el hidrógeno hasta 300 °C? Hállese la variación de la energía interna.

5.6.22. Para calentar 1 kg de un gas desconocido en 1 K a presión constante se requieren 912 J y para calentarlo a volumen constante, 649 J. ¿De qué gas se trata?

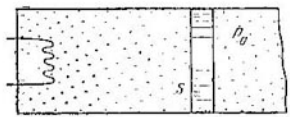
5.6.23*. Un cilindro situado horizontalmente, que contiene 1 mol de gas a temperatura inicial T_0 y presión P_0, está cerrado con un émbolo de sección S. A la derecha del émbolo la presión atmosfé-

rica P_0 es constante. El gas se calienta mediante una espiral. Al moverse el émbolo, sobre él actúa la fuerza de fricción F por parte de las paredes del cilindro. La mitad del calor, que se desprende durante la fricción entre el émbolo y las paredes del cilindro, es absorbida por el gas. La energía interna del gas $U = cT$. ¿Qué dependencia existe entre la temperatura del gas T y la cantidad de calor Q que transmite la espiral al gas?

5.6.24. Un cilindro $ABCD$, cerrado por arriba y abierto por abajo, se fija a la pared de la piscina que está llena de agua. En la



Para el problema 5.6.19*.



Para el problema 5.6.23*.

parte superior del cilindro $KBCM$ se encuentra 1 mol de helio separado del agua mediante el émbolo ($BK = 2h$). El helio se calienta, haciendo circular cierta corriente por la espiral. ¿Qué cantidad de calor es necesario suministrarle al gas para que el émbolo descienda a la distancia h ($AK > h$)? Menospréciense la masa del émbolo, la fricción y la conductibilidad térmica. La piscina es ancha. La densidad del agua es ρ y la sección del recipiente, S.

5.6.25*. Se llama proceso politrópico al proceso que transcurre con capacidad calorífica constante c. Hállese la ecuación de la curva politrópica para un gas. Examínense los casos particulares: 1) $c = c_V$; 2) $c = c_p$; 3) $c = 0$; 4) $c = \infty$.

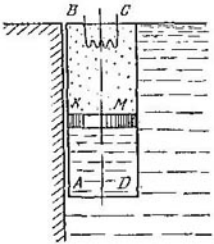
5.6.26. ¿Se calienta o enfría un gas que se dilata según la ley $PV^2 = \text{const}$? Hállese su capacidad calorífica molar en este proceso.

5.6.27. Hállese la capacidad calorífica de un sistema que consta de un recipiente con un gas monoatómico (los parámetros del gas: P_0, V_0, T_0), limitado por un émbolo. Este último se sostiene mediante un resorte de rigidez k. En el espacio a la izquierda del émbolo se ha creado el vacío. Menospréciense las capacidades caloríficas del recipiente, émbolo y resorte. Si evacuamos el gas, el émbolo se encontrará pegado a la pared derecha del cilindro y el resorte resultará no deformado.

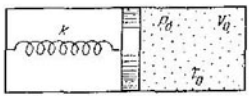
5.6.28*. Hállese la capacidad calorífica de una pompa de jabón, si la tensión superficial de la película de jabón es σ, la presión atmosférica, P_0 y el radio de la pompa, r.

5.6.29*. En un volumen rarificado está colocado verticalmente un recipiente cilíndrico, cerrado por arriba con un émbolo móvil de

masa M. Dentro del recipiente se encuentra un gas monoatómico a presión P. La sección interna del cilindro es S, la altura del volumen dentro del que se halla el gas es H. El émbolo se deja libre. Después de unas vibraciones de corta duración el émbolo se para.



Para el problema 5.6.24.



Para el problema 5.6.27.

¿A qué distancia respecto a la posición inicial se parará el émbolo, si la capacidad calorífica del gas a volumen constante es mucho mayor que la capacidad calorífica del émbolo y cilindro? Todo el sistema está termoaislado del espacio circundante.

§ 5.7. Salida del gas

5.7.1. Un gas con el índice adiabático γ sale a través de un orificio pequeño de un volumen cerrado al vacío. La presión constante del gas en el volumen se mantiene desplazando el émbolo móvil. En caso de salida adiabática del gas su temperatura en el volumen tampoco cambia, en tanto que el gas que sale al vacío, a causa de la expansión adiabática, se enfría prácticamente hasta 0 K. Haciendo uso del principio de conservación de la energía, estímese la velocidad del chorro de gas en el vacío. La temperatura del gas en el volumen es T y la masa molecular del mismo, μ.

Para el problema 5.7.1.

5.7.2*. Determínese la velocidad de la salida adiabática para una mezcla de gases biatómicos con masas moleculares μ_1 y μ_2. La cantidad de moléculas que contiene el primer gas es k veces mayor que la cantidad de moléculas del segundo gas. La temperatura de la mezcla es T.

5.7.3*. Un experimentador necesita átomos de xenón con velocidad igual a 1 km/s. La masa molecular del xenón es 131.

a) ¿A qué temperatura pueden obtenerse átomos con semejantes velocidades para la salida adiabática del gas al vacío?

b) ¿Qué velocidad podrán adquirir los átomos de xenón, si al vacío fluye una mezcla de hidrógeno y una cantidad pequeña de xenón a temperatura ambiente?

5.7.*A*. Determínese la velocidad máxima de salida del gas de la tobera de un cohete, si el empuje de éste se crea mediante las reacciones:

a) $2IJ_2 + O_2 = 2I_2O + 483$ kJ/mol;

b) $2Al + {}^3/_2O_2 = Al_2O_3 + 1{,}65$ MJ/mol;

c) $Be + {}^1/_2O_2 = BeO + 610$ kJ/mol.

5.7.5. La temperatura a que arde el combustible químico en el propulsor de un cohete es $T = 3000$ K y la masa molecular media de los productos de combustión, $\mu = 30$. La salida de dichos productos transcurre de modo adiabático. La capacidad calorífica molar c_p de los productos de combustión es de 33,4 J/(mol·K). La presión del gas en la salida del cohete es mucho más baja que la presión del gas dentro del cohete. Determínese el gasto másico mínimo de combustible que asegura el lanzamiento de un cohete con masa $M = 1000$ t desde la Tierra.

5.7.6*. Cierto gas sale adiabáticamente de un recipiente a través de un tubo. La temperatura del gas en el recipiente es T_1 y la presión, P_1. En la salida del tubo la presión del gas es P_2. Determínese la velocidad del gas en la salida del tubo. La masa molecular del gas es μ y el índice adiabático es γ.

5.7.7*. De una botella, que contiene helio a presión de 1 MPa, se derrama un chorro a presión de 0,1 MPa. La temperatura del gas en el balón es de 300 K. Determínense la temperatura y velocidad del helio en el chorro.

5.7.8*. El aire, comprimido en una botella grande a temperatura de 0 °C, fluye a presión atmosférica de un tubo a velocidad de 400 m/s. Hállese la temperatura del aire que fluye. ¿Cuál es la presión del aire en la botella? El índice adiabático del aire es 1,4.

5.7.9*. Cierto gas a presión P y temperatura T fluye a velocidad v a través de un tubo liso de sección S. Cuando el gas pasa por una red de alambre, que ejerce una resistencia infinitésima al flujo, el gas se calienta. La potencia adquirida es q. Determínese la velocidad del gas detrás de la red de alambre, si la masa molecular del mismo es μ y el índice adiabático γ.

§ 5.8. Probabilidad del estado termodinámico

5.8.1. a) Dividamos cierto volumen V en dos partes idénticas *1* y *2*. Sea que en este volumen se mueve una molécula. Observemos su comportamiento durante el tiempo τ. En término medio la mitad de este tiempo la molécula se hallará en el volumen *1* y la otra mitad, en el volumen *2*. Si en el volumen se mueven dos moléculas, ¿qué

tiempo se encontrará junto con la primera molécula la segunda en el volumen I?

b) En el volumen se mueven tres moléculas. ¿Con qué frecuencia éstas se encontrarán simultáneamente en el volumen I?

c) En el volumen se mueven N moléculas. ¿Con qué frecuencia ellas se hallarán simultáneamente en el volumen I?

5.8.2. La parte del tiempo, durante el cual las partículas se encuentran en cualquier estado, suele denominarse probabilidad p de dicho estado.

a) En un recipiente se encuentran dos moléculas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos moléculas permanezcan en la mitad izquierda del recipiente? ¿En cualquiera de sus mitades?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que las moléculas se encuentren en diferentes mitades del recipiente?

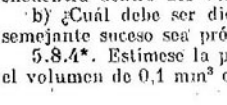
c) En el recipiente se encuentran tres moléculas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos moléculas de ellas permanezcan en la parte izquierda del recipiente y de que en esta mitad del recipiente no se encuentre ni una sola molécula?

5.8.3. En un recipiente de volumen V hay N moléculas.

a) Determínese la probabilidad de que en el volumen V_1, que se encuentra dentro del volumen V, no habrá ni una sola molécula.

b) ¿Cuál debe ser dicho volumen para que la probabilidad de semejante suceso sea próxima a 10^{-2}?

5.8.4*. Estímese la probabilidad de que la densidad del aire en el volumen de 0,1 mm³ en alguna parte de su habitación supere dos veces la densidad corriente. ¿Qué volumen deberá corresponder a esta parte para que la probabilidad sea suficientemente grande?



Para el problema 5.8.5.

5.8.5. ¿Para qué se necesita en la física molecular el concepto de «probabilidad de estado del sistema»? Con frecuencia puede realizarse un suceso poco probable. Por ejemplo, en un recipiente dividido en dos partes idénticas mediante un tabique, en una mitad se encuentra cierto gas. El tabique se retira con rapidez. Así se ha realizado el estado de gas, cuya probabilidad es igual a 2^{-N}, donde N es la cantidad de partículas en el recipiente. Semejante resultado da la solución del problema 5.8.1 c. En los siguientes instantes de tiempo en el recipiente se realizarán otros estados. Mientras tanto el sistema no volverá al estado inicial: ¡demasiado pequeña es su probabilidad! Como consecuencia, transcurre una transición irreversible hacia nuevos estados más probables, las moléculas llenarán todo el volumen del recipiente.

Este ejemplo muestra que el conocer la probabilidad del estado del nuevo sistema es muy útil. Este conocimiento nos ofrece la posibilidad de predecir el comportamiento posterior del sistema: los esta-

dos poco probables se convertirán en más probables. ¿Y de qué manera se podrá calcular dicha probabilidad para otros sistemas? ¿No serán muy complicados los cálculos? Resulta que éstos no son muy complicados. Es necesario calcular en cuánto la probabilidad de un estado supera la probabilidad de otro, de la siguiente manera. Si al estado 1 a temperatura T le suministramos una cantidad de calor Q, aquél pasará a otro estado, cuya probabilidad es $\exp(Q/kT)$ veces mayor que la probabilidad del estado 1 (k es la constante de Boltzmann).

Aduzcamos un ejemplo de cómo se efectúan semejantes cálculos. Hallemos mediante este procedimiento en cuánto la probabilidad del estado, en que todas las N moléculas se encuentran en una mitad del volumen, es inferior a la probabilidad del estado cuando las moléculas se mueven por todo el volumen. Separemos el volumen en que se hallan todas las moléculas con un émbolo móvil (véase la figura). Demos a este estado el nombre de estado 1. Al desplazarse el émbolo hacia la izquierda en Δx, el gas efectuará el trabajo ΔA y se enfriará. Para conservar la temperatura del gas constante, tendremos que suministrar a las moléculas del gas cierta cantidad de calor $\Delta Q = \Delta A$ (para restablecer las pérdidas energéticas en el gas). Pero eso hay que hacerlo durante todo el proceso de desplazamiento del émbolo hacia la izquierda para que la temperatura del gas permanezca constante. Por lo tanto, al desplazar el émbolo hacia la izquierda, transmitiremos al gas a temperatura T la cantidad de calor $Q = A$.

Durante la expansión isotérmica $A = \nu RT \ln (V_f/V_i)$, donde ν es la cantidad de gas (en moles), $R = kN_A$, la constante de los gases, N_A, la constante de Avogadro, V_f, el volumen final, V_i, el volumen inicial. En nuestro caso $N = \nu N_A$, $V_f/V_i = 2$. Por eso la fórmula para el trabajo podemos escribirla de nuevo en la forma $A = NkT \times$ $\times \ln 2$. Por consiguiente, la probabilidad del estado 2 es $\exp(A/kT) =$ $= \exp(N \ln 2)$ veces mayor que la probabilidad del estado 1. Hemos recibido la solución del problema 5.8.1 c, utilizando el proceso termodinámico.

Con ayuda del proceso termodinámico determínese la probabilidad de que en el volumen V_1 que se encuentra dentro del volumen V, se reunirán todas las moléculas que se mueven en el volumen V. Haciendo uso del proceso termodinámico, resuélvase el problema 5.8.3. ¿Se puede de la misma manera resolver el problema 5.8.1?

5.8.6. ¿Qué trabajo mínimo es necesario realizar para poder, a temperatura ambiente, aumentar la concentración de oro en 1 kg de mineral desde 10^{-6} hasta un por 100?

5.8.7*. Demuéstrese que en una solución diluida sobre un tabique semiimpermeable actúa, siendo la temperatura T, la presión $P = nkT$, donde n es la cantidad de moléculas de la substancia diluida en unidad de volumen de la solución. ¿Por qué esta fórmula es válida solamente para la solución diluida?

5.8.8*. En un volumen $2V$ se mueven $2N$ moléculas. ¿En cuánto

la probabilidad de detectar N moléculas en el volumen $V - V_1$ es inferior a la probabilidad de encontrar N moléculas en el volumen V?

5.8.9*. En un recipiente con agua a temperatura de 20 °C se coloca en una cajita hermética 1 g de hielo a temperatura de 0 °C. Determínese en cuánto la probabilidad del proceso de transformación del hielo en agua supera la del proceso inverso: el agua derretida en la cajita empieza de repente a entregar el calor al agua circundante y se convierte en hielo. La temperatura del agua en el recipiente, cuando el hielo se derrite, prácticamente no cambia.

5.8.10. El émbolo divide inicialmente un volumen cilíndrico en dos partes iguales, en las que se hallan idénticas masas de gas perfecto a una misma temperatura. Será real un proceso en el que, al moverse el émbolo, la temperatura de la parte derecha aumenta al doble y la de la izquierda decrece a la mitad? Menospréciense las capacidades caloríficas del émbolo y cilindro. El sistema está aislado.

5.8.11. Un fusil gasodinámico es de por sí un cilindro, lleno de un gas monoatómico y cerrado con un émbolo móvil. El gas, al dilatarse, acelera el émbolo. ¿Será real un proceso en que, cuando aumente el volumen n veces, la temperatura del gas disminuirá n veces o bien $\sqrt{n}$ veces? El sistema está aislado.

§ 5.9. Segundo principio de la termodinámica

5.9.1. Dos cuerpos idénticos, calentados hasta diferentes temperaturas, se ponen en contacto térmico. Las temperaturas de los cuerpos se nivelan. Muéstrese que durante este proceso la entropía del sistema aumenta.

5.9.2. Hállese el incremento de la entropía de 1 kg de hielo durante su derretimiento.

5.9.3. ¿En cuánto aumenta la entropía de 1 kg de agua a temperatura de 293 K al convertirse en vapor?

5.9.4. Hállese el incremento de la entropía de cierto gas con masa m durante su expansión isotérmica desde el volumen V hasta $2V$, si la masa molecular del gas es igual a μ.

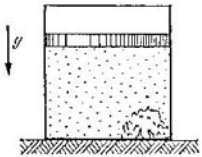
5.9.5. Calcúlese el incremento de la entropía de un gas con masa m al pasar del volumen V_1 y temperatura T_1 al volumen V_2 y temperatura T_2, si el gas: a) se calienta a volumen constante V_1 y luego se dilata de modo isotérmico; b) se dilata a temperatura constante T_1 hasta el volumen V_2 y luego se calienta a volumen constante; c) se dilata de modo adiabático hasta el volumen V_2 y después se calienta a volumen constante. La masa molecular del gas es μ.

5.9.6*. Un trozo de hielo con una masa de 0,1 kg a temperatura de 0 °C se mete en un recipiente termoaislado que contiene 2 kg de benceno a 50 °C. Hállese el incremento de la entropía del sistema después de que se establezca el equilibrio. El calor específico del benceno es de 1,75 kJ/(kg·K).

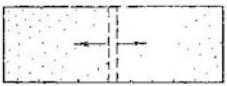
5.9.7*. En un recipiente termoaislado se encuentran 0,5 kmol de helio y 1 kg de hielo. En el instante inicial la temperatura del

hielo era 273 K y la del helio, 303 K. El recipiente está cerrado con un émbolo móvil. Búsquese el incremento de la entropía del sistema cuando se establezca el equilibrio.

5.9.8. El volumen V está dividido en dos partes iguales mediante dos tabiques, cada uno permeable solamente para aquel gas que contacta con él. Las presiones iniciales de los gases son P y las temperaturas, T. Bajo la acción de los gases los tabiques se mueven



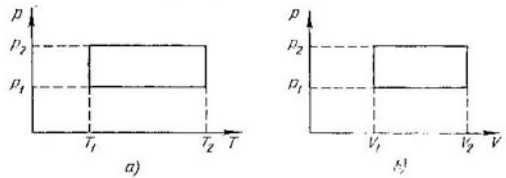
Para el problema 5.9.7*.



Para el problema 5.9.8.

hasta los límites del volumen. Hállese el incremento de la entropía durante este movimiento. ¿Por qué semejante proceso no puede tener lugar, si los gases de las dos partes son iguales o es imposible experimentalmente diferenciar un gas de otro (por ejemplo, en el siglo pasado resultaba imposible distinguir los isótopos)?

5.9.9*. Una máquina térmica con 1 mol de cierto gas monoatómico perfecto que hace las veces de agente propulsor funciona si-



Para el problema 5.9.9*

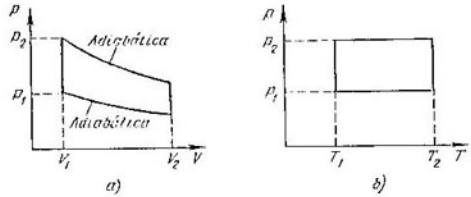
guiendo los ciclos cerrados expuestos en la figura. Hállese el incremento de la entropía en la máquina durante un ciclo. Las temperaturas del calentador y del refrigerador son T_1 y T_2.

5.9.10*. Hállese el rendimiento de los ciclos, mostrados en la figura, si como agente propulsor se toma un gas monoatómico perfecto.

5.9.11. ¿Existe algún proceso al realizar el cual todo el calor que se transmite al cuerpo desde el calentador se convierte en trabajo?

5.9.12. ¿Es posible en la práctica transformar toda la energía interna de un gas en trabajo mecánico?

5.9.13. Una máquina de vapor con potencia de 14,7 kW consume durante 1 h de funcionamiento 8,1 kg de carbón, cuyo calor específico de combustión es de $3{,}3 \cdot 10^7$ J/kg. La temperatura en la caldera es de 200 °C, en la máquina frigorífica, 58 °C. Hállese el rendimiento



Para el problema 5.9.10*.

real de la máquina y compárese el resultado con el rendimiento de una máquina térmica ideal.

5.9.14. ¿Por qué el rendimiento de una máquina térmica en un proceso cíclico es el máximo cuando la entropía del sistema no varía?

5.9.15. ¿Por qué el rendimiento de un motor de combustión interna disminuye bruscamente al surgir la detonación (combustión explosiva de la mezcla que se quema)?

5.9.16. En el océano flota una lancha con un trozo de hielo con masa de 1 kg a 0 °C. Determínese el trabajo máximo que puede obtenerse aprovechando el derretimiento del hielo. La temperatura del agua es de 27 °C.

5.9.17. Estímese qué trabajo puede realizarse disponiendo de un iceberg de volumen de 1 km³ en calidad de máquina frigorífica y el océano haciendo las veces de calentador. ¿Qué tiempo necesitará la Central hidroeléctrica de Krasnoyarsk para producir la misma cantidad de energía?

5.9.18*. Un cuerpo calentado con temperatura inicial T_1 se aprovecha como calentador en una máquina térmica. La capacidad calorífica del cuerpo no depende de la temperatura y es igual a C. Un medio ilimitado, cuya temperatura es constante e igual a T_0, sirve de máquina frigorífica. Hállese el trabajo máximo que puede obtenerse por cuenta del enfriamiento del cuerpo. Realícese el cálculo para 1 kg de agua hirviendo y de hielo que se derrite.

5.9.19*. Se dispone de dos cuerpos con temperaturas iniciales T_1 y T_2. Las capacidades caloríficas de estos cuerpos son C_1 y C_2, respectivamente, y no dependen de la temperatura. Uno de los cuerpos se usa como calentador y el otro, como refrigerador en una máquina térmica. Hállese el trabajo máximo que puede obtenerse de esta manera. Realícese el cálculo para el caso en que el primer cuerpo es 1 kg de agua hirviendo y el segundo, 1 kg de agua a 0 °C.

5.9.20. ¿Cómo cambiará la temperatura en la habitación, si se deja abierta la puerta del frigorífico en funcionamiento?

5.9.21. Una máquina térmica ideal con un rendimiento η funciona siguiendo el ciclo inverso. ¿Qué cantidad máxima de calor se puede extraer del frigorífico, al realizar el trabajo mecánico A?

5.9.22. Una máquina térmica ideal, que funciona siguiendo el ciclo inverso, transmite el calor desde el frigorífico con agua a 0 °C al calentador con agua a temperatura de 100 °C. ¿Qué cantidad de agua es necesario congelar en el frigorífico para convertir 1 kg de agua en el calentador en vapor?

5.9.23. Con ayuda de un hornillo eléctrico de potencia de 1 kW en la habitación se mantiene la temperatura de 17 °C, siendo la temperatura del aire circundante de — 23 °C. ¿Qué potencia se necesitaría para mantener en la habitación la misma temperatura con ayuda de una bomba térmica ideal?

5.9.24*. ¿Qué trabajo mínimo es necesario gastar para congelar 1 kg de agua que se encuentra a temperatura del medio circundante igual a 300 K?

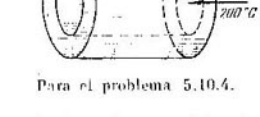
5.9.25. Se sabe que al disolver en el agua ciertas substancias (por ejemplo, hiposulfito) la temperatura de la solución decrece. Utilizando dicha solución como máquina frigorífica y el medio ambiente como calentador, podemos obtener cierto trabajo. Luego, después de esperar que se seque la solución, repitimos el ciclo. ¿Obtendremos de esa manera un móvil perpetuo de segundo género?

§ 5.10. Transiciones de fase

5.10.1. En una cazuela se echa agua fría (a temperatura de 10 °C) y se pone a calentar en un hornillo. Pasados 10 min el agua comienza a hervir. ¿Dentro de cuánto tiempo el agua se evaporará por completo?

5.10.2. En un matraz se encontraba agua a 0 °C. Evacuando por medio de una bomba el vapor, se logró congelar toda el agua en el matraz. ¿Qué parte del agua se evaporó?

5.10.3. En 100 g de agua a temperatura de 10 °C se meten 40 g de hielo con temperatura de —10 °C. ¿Cuál será el estado de equilibrio térmico en semejante sistema, si éste está termoaislado? El calor específico del hielo es de 2,5 kJ/ /kg·K.



Para el problema 5.10.4.

5.10.4. El cambiador de calor consta de dos tubos coaxiales largos. Por el tubo interior se deja pasar lentamente vapor de agua, cuya temperatura inicial es de 200 °C. Al tubo exterior se alimenta cada segundo en contracorriente 0,1 kg de agua a temperatura de 20 °C,

que sale por la parte opuesta en forma de vapor a temperatura de 150 °C. ¿Qué masa de vapor se suministra al tubo interior del cambiador de calor en unidad de tiempo? En los tubos se mantiene la presión atmosférica.

5.10.5*. Determínese el grosor del hielo que se forma durante 1 día entero en la superficie de un lago, siendo la temperatura del aire de —10 °C. La conductibilidad térmica del hielo es de 2,2 W/(m·K) y su densidad, 0,9 g/cm³.

5.10.6. ¿Por qué una cazuela empieza a quemarse solamente después de que se evapore toda el agua?

5.10.7. ¿Se puede hervir el agua en un vaso de papel?

5.10.8. ¿Por qué las gotas de agua en un hornillo incandescente «viven» más tiempo que en un hornillo simplemente caliente?

5.10.9. ¿Por qué antes de que el agua empiece a hervir, la tetera «alborota»?

5.10.10. ¿Por qué el agua en una olla con tapa hierve antes que sin ésta?

5.10.11. En un hornillo eléctrico de 1 kW de potencia hierve agua en una tetera. Hállese la velocidad de salida del vapor por el pitorro de la tetera, si lo consideramos como un gas perfecto. La presión del vapor en el extremo del pitorro es de 1 atm y la sección del pitorro es de 1 cm². Considérese que toda la energía del hornillo se transmite al agua.

5.10.12*. En un vaso se vierten dos líquidos inmiscibles: tetracloruro de carbono (CCl_4) y agua. A presión atmosférica normal CCl_4 hierve a 76,7 °C y el agua, a 100 °C. Al calentar uniformemente el vaso en baño María, la ebullición en la superficie de separación de los líquidos empieza a la temperatura de 65,5 °C. Determínese cuál de los líquidos se evaporará con mayor rapidez (según la masa) en caso de semejante ebullición «interfacial» y en cuánto. La presión del vapor saturado de agua a 65,5 °C es de 25,9 kPa.

5.10.13. Por qué en las calderas de vapor el vapor se recalienta?

5.10.14. ¿Se puede mediante una bomba hidráulica de succión elevar el agua hirviendo?

5.10.15. Al mantener la temperatura crítica, el calor de vaporización para cualquier líquido es nulo. ¿Por qué?

5.10.16. ¿Por qué la escarcha en los árboles desaparece a veces sin haber deshielo?

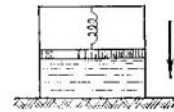
5.10.17. ¿Por qué los productos en un frigorífico cerrado se secan?

5.10.18. En la calle cae una lluvia fría de otoño. En la cocina se cuelga mucha ropa lavada. ¿Se secará antes la ropa, si abrimos la ventanilla?

5.10.19. Un cilindro de sección de 20 cm² se divide por un émbolo con masa de 5 kg en dos partes. La parte inferior primero contenía agua y la parte superior estaba rarificada. El émbolo se une con el cilindro mediante un resorte con rigidez de 15 N/m. El resorte estaba inicialmente no deformado. Determínese la masa del vapor que se

formó al calentar el agua desde 0 hasta 100 °C. Despréciese la fricción.

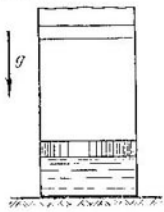
5.10.20. En un cilindro, cerrado con un émbolo, a temperatura de 20 °C se encuentra aire. En el fondo del cilindro se encuentra una gota de agua. ¿Cuál será la presión en el cilindro después de reducir a la mitad, de modo isotérmico, el volumen? ¿Qué trabajo será necesario realizar para ello? El volumen inicial del cilindro era de 0,5 m³ y la presión del vapor saturado a temperatura de 20 °C era igual a 1,73 kPa. La presión inicial en el cilindro era de 101,3 kPa.



Para el problema 5.10.19.

5.10.21. En un recipiente de elevada resistencia mecánica se encuentra nitrógeno a temperatura de 300 K y presión P_0. En el recipiente se inyecta cierta cantidad de nitrógeno líquido pulverizado a la temperatura de ebullición de 77,3 K que se evapora rápidamente. Pasado cierto tiempo prolongado, cuando la temperatura alcanza la inicial, en el recipiente se establece la presión $2P_0$. Determínese cuál fue la presión mínima del nitrógeno en el recipiente después de la inyección. La capacidad calorífica molar del nitrógeno $c = {}^5/_2 R$, el calor molar de vaporización es de 5,53 kJ/mol, $R = 8{,}3$ J/(mol·K).

5.10.22. En un volumen rarificado suficientemente grande, que tiene forma de un cilindro, cerrado con un émbolo, se introduce una pequeña cantidad de una mezcla de agua y hielo. La masa del hielo es m, la temperatura, 0 °C y la presión del vapor saturado a 0 °C es igual a P_0. ¿En cuánto habrá que cambiar el volumen mediante el émbolo para que el hielo se derrita? ¿Qué trabajo es necesario realizar en este caso? El calor específico de vaporización es q y el calor específico de derretimiento del hielo, λ.



Para el problema 5.10.23*.

5.10.23*. Un cilindro con sección de 100 cm² se coloca verticalmente en un volumen del que se ha evacuado el aire. En el cilindro hay un émbolo móvil que tapa 100 cm³ de agua. El cilindro con el émbolo y el agua tienen la temperatura de 100 °C. El émbolo se deja libre. Cuando éste se detuvo, resultó que debajo del émbolo se encuentran hielo a 0 °C y vapor de agua. La presión del vapor saturado sobre el hielo a 0 °C es igual a 610 Pa. Todo el sistema está termoaislado del espacio circundante. La capacidad calorífica del cilindro con el émbolo es de 42 J/°C. ¿A qué altura se elevaría el émbolo, si se lograse hacer semejante sistema?

5.10.24. ¿Qué parte del agua sobreenfriada hasta la temperatura de —4 °C se congelará, si al agua se arroja un trocito de hielo y con ello se provoca la cristalización?

5.10.25. Un trozo de hielo a temperatura de 0 °C se coloca en una envoltura impermeable para el calor y se somete a una presión de 100 MPa. ¿Qué parte del hielo se derretirá, si al aumentar la presión en 13,8 MPa la temperatura de fusión del hielo baja en 1 °C? El calor específico del hielo es de 2,5 kJ/(kg·K).

§ 5.11. Radiación térmica

5.11.1. La superficie de un cuerpo, calentado hasta la temperatura T, radia de 1 cm² de la superficie en 1 s una energía, proporcional al cuarto grado de la temperatura: $\varphi = \varepsilon\sigma T^4$ (densidad del flujo energético), donde ε es el coeficiente de radiación del cuerpo; $\sigma = 5{,}672 \cdot 10^{-12}$ W/(cm²·K⁴), la constante de Stefan—Boltzmann; T, la temperatura absoluta.

a) Estímese cuánta energía térmica radia en 1 s nuestro cuerpo (el flujo radiante de la superficie de nuestro cuerpo). El coeficiente de radiación del cuerpo tómese igual a 0,3.

b) El Sol emite como el radiador integral o cuerpo negro a temperatura de 6300 K. Determínese cuál es la densidad del flujo radiante de la superficie solar.

5.11.2. Estímese la temperatura de la espiral de un hornillo eléctrico de 0,5 kW de potencia y del filamento de una bombilla con potencia de 150 W. Considérese que la transmisión del calor se efectúa solamente mediante la radiación.

5.11.3*. Determínese la densidad de la energía de radiación térmica en la cavidad de un cuerpo con temperatura T. La velocidad de la luz es de $3 \cdot 10^8$ m/s.

5.11.4. Haciendo uso de la condición de equilibrio térmico de dos cuerpos que intercambian energía mediante la radiación térmica, demuéstrese que los coeficientes de radiación de los mismos son iguales a los coeficientes de absorción de la radiación por dichos cuerpos.

5.11.5. a) «Calentando un trozo de acero, al alcanzar la temperatura de 800 °C, observaremos una incandescencia brillante de color cereza rojo; mientras que una barrita transparente de cuarzo fundido no luce a esa misma temperatura» (*G. S. Landsberg*. Óptica. Ed. «Mir», Moscú, 1984). Explíquese este efecto.

b) ¿Por qué la tiza, al colocarla entre carbón incandescente, parece oscura?

5.11.6*. a) Determínese la temperatura estacionaria de una esfera metálica en la proximidad de una superficie plana negra, calentada hasta la temperatura T.

b) Determínese la temperatura estacionaria de una esfera que se encuentra entre dos planos negros paralelos, calentados hasta las temperaturas T_1 y T_2.

5.11.7. Una esfera de radio R se calienta hasta la temperatura T. El coeficiente de radiación de la superficie de la esfera es ε. Deter-

mínese la temperatura estacionaria de una partícula de polvo esférica que se halla a la distancia L del centro de la esfera.

5.11.8. Las distancias entre el Sol y los siguientes planetas: la Tierra, Mercurio, Venus y Marte, son iguales a $1{,}5 \cdot 10^8$; $5{,}8 \times \times 10^7$; $1{,}4 \cdot 10^8$ y $2{,}3 \cdot 10^8$ km, respectivamente. La temperatura media en la superficie de la Tierra es de 20 °C.

a) Estímese la temperatura media en las superficies de Mercurio, Venus y Marte.

b) Estímese la energía que radia el Sol en 1 s (el flujo de radiación desde la superficie solar).

c) Estímese la temperatura en la superficie de la Luna en el momento en que los rayos solares son perpendiculares a su superficie. ¿Por qué bajo esa misma condición en la superficie terrestre no se observa semejante temperatura?

5.11.9. La densidad del flujo radiante del cielo estelar es de unos $2 \cdot 10^{-10}$ W/cm^2. Haciendo uso de esta magnitud, estímese la temperatura del polvo intragaláctico.

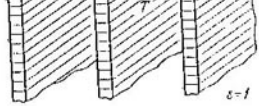
5.11.10. ¿Qué temperatura se establecerá dentro de una nave cósmica esférica que gira alrededor de la Tierra? La nave no tiene fuente interna de energía.

5.11.11.*. Determínese el flujo de radiación térmica que se transmite de una placa paralela a otra, si la temperatura de las placas son T_1 y T_2, los coeficientes de radiación, ε_1 y ε_2. El área de cada placa es S. La distancia entre las placas es mucho menor que sus dimensiones.

5.11.12. El plano interior se mantiene a temperatura T.

a) Cuáles son las temperaturas de las placas exteriores apantalladoras?

b) ¿Cuántas placas apantalladoras es necesario poner de las dos partes del plano calentador para disminuir la temperatura de la placa exterior apantalladora hasta $T/2$?



Para el problema 5.11.12.

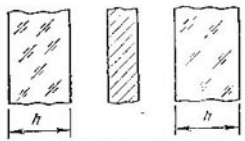
Para el problema 5.11.13*.

c) ¿Qué temperatura tendrá el plano interior, si las placas exteriores se mantienen a las temperaturas T_0 y $2T_0$?

5.11.13*. Un filamento de radio r se apantalla por tres cilindros con radios R, $2R$ y $3R$. La temperatura del filamento es T. Determí-

nese la temperatura de la pantalla exterior. El material del filamento y de la pantalla es el mismo y el coeficiente de radiación $\varepsilon = 1$.

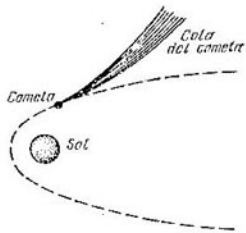
5.11.14*. En un volumen, en el que se ha creado el vacío, se encuentra cierto plano metálico que se calienta, apantallado por las dos partes con dos láminas cerámicas de grosor h. Los coeficientes de radiación del plano y de las láminas son r y las conductibilidades térmicas de las placas, $\varkappa$. Las temperaturas de las láminas por los lados exteriores son T_1 y la temperatura de la cámara de vacío, T_2. Determínese la temperatura del plano metálico.



Para el problema 5.11.14*.

5.11.15. a) La radiación es en sí un gas fotónico. La energía del fotón E está ligada con su impulso p mediante la relación $p = E/c$, donde c es la velocidad del fotón que es igual a la velocidad de la luz. Demuéstrese que la presión del gas fotónico P está relacionada con la energía media $\langle E \rangle$ del gas de la siguiente manera $\langle E \rangle = P/3$.

b*) Demuéstrese que la energía de radiación es proporcional al cuarto grado de la temperatura. Para demostrar eso hágase uso de la condición de la independencia entre la variación de la entropía del sistema, al pasar de un estado a otro, y el carácter de la transición. Pueden efectuarse, por ejemplo, las siguientes transiciones: a temperatura T pasar de un volumen nulo al volumen V, lleno de gas fotónico a temperatura T; luego calentar el volumen V hasta la temperatura $T + \Delta T$ ($\Delta T \ll T$); y a la temperatura $T + \Delta T$ pasar del volumen nulo al volumen V, lleno de gas fotónico a temperatura $T + \Delta T$.



Para el problema 5.11.17.

5.11.16. «... El yate cósmico es algo parecido a una esfera, cuya envoltura exterior —una vela extraordinariamente fina y ligera— se levanta y desplaza en el espacio, percibiendo la presión de los rayos luminosos ... Si esta nave pequeña quedase sin mando en las proximidades de alguna estrella ... y la fuerza de atracción fuese insignificante, ella se alejaría de la estrella describiendo una recta» (*P. Bul.* Planeta de los monos. Biblioteca de ciencia-ficción moderna, 1967, t. 13).

a) ¿Qué aceleración máxima puede desarrollar dicho yate cósmico distando R de una estrella, si el flujo radiante de ésta es Φ? El área de la vela es S y la masa del yate, M.

b*) ¿Qué velocidad adquiriría el yate, al recorrer bajo la acción

de radiación la distancia por un radio desde R_1 hasta R_2? La vela refleja totalmente la radiación.

5.11.17. a) Explíquese la forma de la cola de cometa, mostrada en la figura. La línea de trazos que contornea el Sol, es la trayectoria del cometa.

b) Estímese la dimensión máxima de las partículas de polvo de aluminio que en el espacio cósmico se alejasen del Sol bajo el efecto de la radiación solar.

Capítulo 6

ELECTROSTÁTICA

§ 6.1. Ley de Coulomb[1])

6.1.1. a) Hállese la fuerza de interacción entre dos cargas una de 1 C y la otra de 2C que distan 1 km.

b) ¿Con qué fuerza actúan recíprocamente dos electrones que distan 10^{-8} cm? La carga del electrón $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

6.1.2. 1 cm^3 de agua lo dividieron en cargas con signos contrarios que después las separaron a la distancia de 1 m. ¿Con qué fuerza se atraerán estas cargas?

6.1.3. La fuerza de interacción entre dos cargas idénticas que distan 1 m es igual a 1 N. Determínense estas cargas en SI y CGS.

6.1.4. Hállese la tensión del hilo que une dos bolas idénticas de radio r, en cuyo centro se encuentran cargas iguales Q. Una de las bolas flota en la superficie de cierto líquido con densidad ρ y la segunda bola tiene una masa m y está suspendida del hilo permaneciendo dentro del líquido. La distancia entre los centros de las bolas es l.

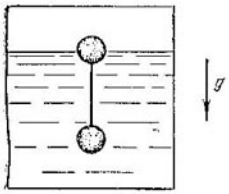
6.1.5. Tres cargas q_1, q_2 y q_3 dispuestas en una línea se unen mediante dos hilos de longitud l. Hállense las tensiones de los hilos.

6.1.6. a) En un tubo horizontal de longitud l se encuentra una bola con carga positiva. En las proximidades de los extremos del tubo en una parte se encuentra la carga fija q_1 y en la otra, la carga fija q_2. Hállese la posición de equilibrio de la bola, si las dos cargas son positivas. ¿Será estable esta posición de equilibrio? ¿Será estable la posición de equilibrio si retiramos el tubo? ¿Se encontrará en posición estable de equilibrio en el tubo una bola que tenga carga negativa?

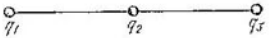
b) En un tubo vertical está fijada una carga Q. ¿En qué lugar con relación a esta carga va a estar en equilibrio una bola de masa m con carga Q y con carga $-Q$?

---

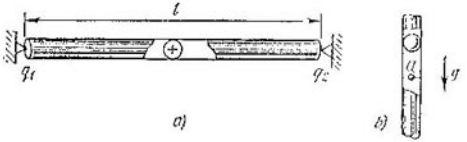
[1]) Si en el problema no se da el valor de la constante dieléctrica de la substancia, considérese que es igual a la unidad.



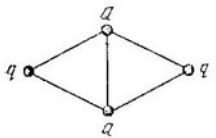
Para el problema 6.1.4.



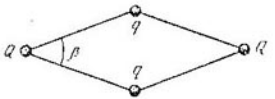
Para el problema 6.1.5.



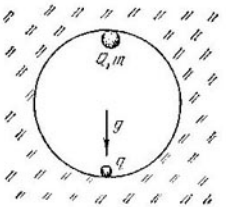
Para el problema 6.1.6.



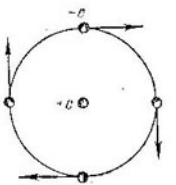
Para el problema 6.1.7.



Para el problema 6.1.8.



Para el problema 6.1.9 g.



Para el problema 6.1.10b.

6.1.7. Cuatro cargas q, Q, q, Q están unidas mediante cinco hilos de longitud l de la manera mostrada en la figura ($Q > q$). Determínese la tensión del hilo que une las cargas Q.

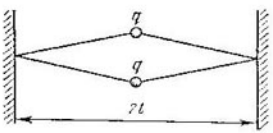
6.1.8. Cuatro cargas Q, q, Q, q se unen mediante cuatro hilos de longitud l de la manera expuesta en la figura. Determínense los ángulos β entre los hilos.

6.1.9. ¿Qué carga mínima q, fijada en el punto inferior de una cavidad esférica de radio R, puede mantener en el campo de gravedad en su punto superior una bola de masas m con carga Q?

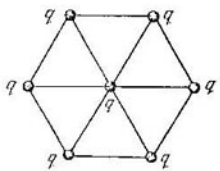
6.1.10. a) Un electrón se mueve alrededor de un protón pesado a la velocidad angular ω describiendo una órbita circular. La carga del electrón es $-e$; su masa, m_e; mientras que la carga del protón, $+e$. Hállese el radio de la órbita (en cm), si $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ CGS, $\omega = 10^{16}$ rad/s y $m_e = 9 \cdot 10^{-28}$ g.

b) Cuatro electrones, situados en los ángulos de un cuadrado con lado a, giran describiendo una órbita circular alrededor del protón. Éste se encuentra en el centro de dicho cuadrado. Determínese la velocidad angular del movimiento de los electrones por la órbita.

6.1.11. ¿A qué distancia se encontrarán dos cargas q, unidas a dos paredes inmóviles mediante cordones de goma de la manera ilustrada en la figura? La separación de los cordones, provocada por la interacción de las cargas, es mucho menor que su longitud l. La distancia entre las paredes es $2l$. La rigidez de los cordones de goma es k.



Para el problema 6.1.11.



Para el problema 6.1.12*.

6.1.12*. Siete cargas idénticas q están unidas mediante iguales hilos elásticos de la manera expuesta en la figura. Después de dejar las cargas libres, las longitudes de los hilos resultaron iguales a l. Determínese la tensión de cada hilo.

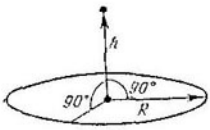
6.1.13. Dos bolas con la misma carga y con masas M, suspendidas en un mismo punto por medio de hilos con longitud l, se separaron de manera que el ángulo entre los hilos resultó ser recto. Determínese la carga de las bolas.

§ 6.2. Intensidad del campo eléctrico

6.2.1. ¿Qué intensidad tendrá un campo eléctrico, creado por una carga de 10 C, en SI y CGS, y que dista 1 y 20 m de aquél? ¿Con qué fuerza actúan dichos campos sobre una carga de 0,001 C y sobre otra carga de 1000 CGS?

6.2.2. a) La fuerza que actúa sobre una carga de 1 C es igual a 1 N. ¿Qué intensidad tendrá el campo eléctrico que actúa sobre la mencionada carga, en SI y CGS?

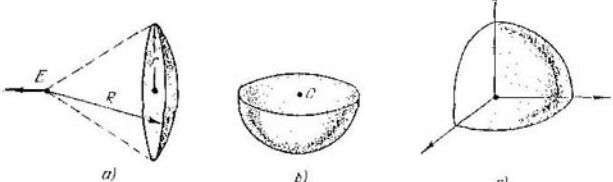
b) La fuerza que actúa sobre una carga de 10 CGS es igual a 100 dinas. ¿Cuál será la intensidad del campo eléctrico que actúa sobre esta carga, en SI y CGS?



Para el problema 6.2.3.

6.2.3. ¿Qué intensidad tendrá el campo eléctrico en el centro de una circunferencia, cargada uniformemente, de radio R? ¿A qué será igual dicha intensidad a una distancia h del centro de la circunferencia? La carga de la circunferencia es Q.

6.2.4*. a) Demuéstrese que la intensidad del campo eléctrico de un segmento esférico, cargado uniformemente, en el centro de la esfera de radio R, de la que aquél está cortada, es igual a $E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi r^2}{R^2}$, donde σ es la densidad superficial de la carga del segmento, πr^2, el área del círculo que lo cierra.

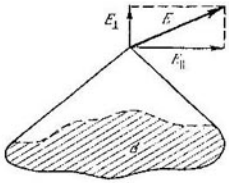


Para el problema 6.2.4*.

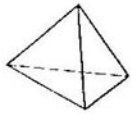
b) Determínese la intensidad del campo eléctrico en el centro de un hemisferio cargado uniformemente (en el punto O). La densidad superficial de la carga en el hemisferio es σ.

c) Hállese la intensidad del campo eléctrico, creado por una sección cargada uniformemente de cierta esfera con radio R, yacente entre tres planos de coordenadas, en el centro de la esfera situado en el origen de coordenadas. La densidad superficial de la carga en esta sección es σ.

6.2.5. Demuéstrese que la componente de la intensidad del campo eléctrico, perpendicular a la superficie de una sección cargada uniformemente del plano, es igual a $E_\perp = \sigma\Omega/4\pi\varepsilon_0$, donde Ω es el ángulo sólido, bajo el que se ve esta sección desde el punto examinado del espacio; σ, la densidad superficial de la carga. Haciendo uso de lo expuesto, determínese la intensidad del campo eléctrico:



Para el problema 6.2.5.



Para el problema 6.2.7*.

a) en el centro de un cubo, cinco caras del cual están cargadas uniformemente con una densidad superficial σ;

b) en el centro de un tetraedro regular, tres caras del cual están cargadas con densidad superficial σ_1 y la cuarta, con la densidad superficial σ_2;

c) de un plano cargado uniformemente, si la densidad superficial de la carga es σ;

d) en el eje de un tubo largo con sección en forma de triángulo regular, si las densidades superficiales de las cargas en las caras del tubo son σ_1, σ_2 y σ_3.

6.2.6. a) Un anillo metálico se rompió bajo la acción de las fuerzas coulombianas, cuando la carga del anillo era Q. Se hizo otro anillo nuevo idéntico al anterior, pero de un material cuya resistencia mecánica es 10 veces mayor. ¿Qué carga romperá el nuevo anillo?

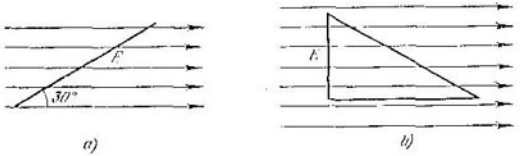
b) ¿Qué carga romperá un anillo nuevo fabricado del material inicial, si las dimensiones de ese anillo nuevo son 3 veces más grandes que los del anillo viejo?

6.2.7*. Las caras de un tetraedro regular están cargadas uniformemente con una misma densidad constante. Para juntar dos caras del tetraedro es necesario realizar el trabajo A. ¿Qué trabajo será necesario ejecutar para juntar todas las caras del tetraedro?

6.2.8. a) La intensidad de un campo eléctrico homogéneo es E. ¿Qué flujo de la intensidad del campo eléctrico atravesará un cuadrado con lado a, cuyo plano se encuentra bajo un ángulo de 30° con relación a la dirección del campo eléctrico?

b) Cuando se calcula el flujo de la intensidad del campo eléctrico a través de una superficie cerrada, los flujos que penetran en el volumen se toman con signo negativo, mientras que los flujos que salen se toman con signo positivo. Haciendo uso de esta regla, hállen-

se los flujos positivos y negativos del campo eléctrico homogéneo de intensidad E a través de la superficie cerrada de un prisma triangular, cuya altura es h. La cara anterior del prisma, cuya anchura es

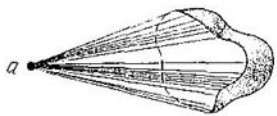


Para el problema 6.2.8.

h, se encuentra perpendicularmente a E y la cara inferior, paralelamente a E.

c) Demuéstrese que el flujo de la intensidad de un campo eléctrico homogéneo a través de cualquier superficie cerrada es nulo.

6.2.9. Demuéstrese que el flujo de la intensidad del campo eléctrico creado por una carga puntual Q a través de cualquier superfi-



Para el problema 6.2.9.

cie es igual al ángulo sólido bajo el cual se ve dicha superficie, multiplicado por Q/ε_0.

6.2.10. Haciendo uso de la ley de Gauss, determínese la intensidad del campo eléctrico:

a) de una esfera cargada uniformemente, dentro y fuera de ella, si la carga global de la esfera es Q;

b) de un hilo infinito cargado uniformemente, si la densidad lineal de la carga del hilo es ρ;

c) de un plano infinito cargado uniformemente, si la densidad superficial de la carga en el plano es σ;

d) de una esfera cargada uniformemente con radio R, dentro y fuera de ella, si la densidad volumétrica de la carga es ρ; trácese la gráfica de la dependencia entre la intensidad del campo eléctrico y la distancia hasta el centro de la esfera;

e) de un cilindro infinito cargado uniformemente con radio R, dentro y fuera del mismo, si la densidad volumétrica de la carga dentro del cilindro es ρ; trácese la gráfica de la dependencia entre la intensidad del campo eléctrico y la distancia hasta el eje del cilindro;

f) de una lámina infinita cargada uniformemente con grosor h, fuera y dentro de ella, si la densidad volumétrica de la carga en la lámina es ρ; trácese la gráfica de la dependencia entre la intensidad del campo eléctrico y la distancia hasta la lámina.

6.2.11. Hállese la intensidad del campo eléctrico de una carga distribuida, cuya densidad volumétrica es: a) inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r hasta el punto O: $\rho = \rho_0 (r_0/r)^2$; b) inversamente proporcional a la distancia r hasta la recta infinita: $\rho = \rho_0 (r_0/r)$.

6.2.12. Hállese la distribución de la densidad volumétrica de una carga eléctrica: a) en una esfera, si el vector intensidad del campo eléctrico E_0 en ella está dirigido a lo largo de su radio y no varía en módulo; b) en un cilindro infinito si el vector intensidad del campo eléctrico E_0 en él está dirigido a lo largo de su radio y no cambia en módulo.

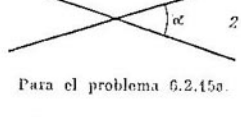
6.2.13*. a) ¿Con qué fuerza actúa sobre las caras de un tetraedro una carga q, colocada en su centro? La densidad superficial de la carga en las caras es σ.

b) ¿Con qué fuerza se repelen las caras de un cubo y las de un tetraedro, cargadas uniformemente? La densidad superficial de la carga es σ y la longitud de la arista es l.

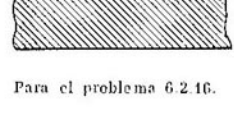
6.2.14. a) ¿A qué es igual la intensidad del campo eléctrico entre dos planos infinitos y paralelos, cuyas densidades superficiales de las cargas son: $+\sigma$ y $-\sigma$, $+\sigma$ y $+\sigma$, -2σ y $+\sigma$? ¿A qué es en estos casos igual la intensidad del campo eléctrico fuera de los planos?

b) ¿Qué intensidad tendrá el campo eléctrico de un sistema de tres planos infinitos paralelos, cuyas densidades superficiales de las cargas son: $+\sigma$, $+\sigma$ y $+\sigma$; $+\sigma$, $-\sigma$ y $+\sigma$; $+\sigma$, -2σ y $+\sigma$; $+\sigma$, -4σ y $+3\sigma$?

6.2.15. a) Dos planos ilimitados que se cortan formando el ángulo α, dividen el espacio en cuatro zonas. ¿Qué intensidad tendrá el campo eléctrico en las zonas *1* y *2*, si las densidades superficiales de las cargas en los planos son $+\sigma$ y $-\sigma$, o bien $+\sigma$ y $+\sigma$?



Para el problema 6.2.15a.



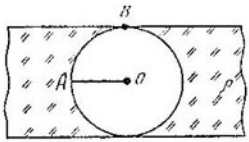
Para el problema 6.2.16.

b) Cuatro planos ilimitados que se intersecan, con una densidad superficial de la carga σ, limitan un volumen en forma de tetraedro regular. Determínese la intensidad del campo eléctrico dentro y fuera de dicho volumen.

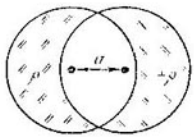
6.2.16. Dos láminas ilimitadas cargadas se ponen una sobre la otra. El grosor de la primera lámina es h y la densidad volumétrica de la carga dentro de la primera lámina es $+\rho$. ¿Cuál será la intensidad máxima del campo eléctrico en este sistema, si el grosor y la densidad volumétrica de la carga de la segunda lámina son: h y $-\rho$; $+2h$ y $-\rho/2$, $2h$ y $+\rho$?

6.2.17. En una lámina ilimitada cargada uniformemente con una densidad volumétrica ρ se corta una cavidad esférica de la manera mostrada en la figura. El grosor de la lámina es h. ¿Qué intensidad tendrá el campo eléctrico en los puntos A y B? Hállese la dependencia entre la intensidad del campo eléctrico a lo largo de la recta OA y la distancia hasta el punto O.

6.2.18. En una esfera cargada uniformemente con una densidad volumétrica ρ se corta una cavidad esférica de radio r, cuyo centro dista a del centro de aquélla. Hállese la intensidad del campo eléctrico en la recta que une el centro de la cavidad y el centro de la esfera. Demuéstrese que el campo eléctrico en la cavidad es homogéneo.



Para el problema 6.2.17.



Para el problema 6.2.19*.

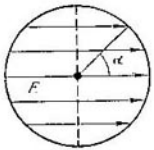
6.2.19*. Al intersecarse dos esferas de radio R, cuyos centros distan a uno del otro, forman dos «medias lunas». Sus volúmenes están cargados uniformemente con cargas eléctricas de diferentes signos. La densidad volumétrica de la carga eléctrica a la izquierda es $-\rho$ y a la derecha, $+\rho$. Demuéstrese que el campo eléctrico en la zona de intersección de las esferas es homogéneo. Hállese la intensidad de este campo.

b) Haciendo uso del resultado del problema a), y aplicando el método de transición al límite $a \to 0$, $\rho \to \infty$, $a\rho = \text{const}$, hállese la distribución de la carga en una esfera de radio R que cree dentro de ella un campo eléctrico homogéneo de intensidad E. ¿Cómo está relacionada la densidad superficial máxima de la carga con dicha intensidad?

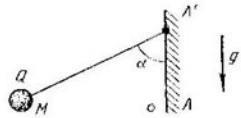
6.2.20*. Hállese la distribución de una carga en la superficie de un cilindro infinito de radio R que forme dentro del cilindro un campo eléctrico homogéneo de intensidad E.

6.2.21*. ¿Qué intensidad tendrá el campo eléctrico de un hilo de longitud l cargado uniformemente en la recta que representa la

continuación del hilo, a la distancia x del cabo más cercano del hilo? La densidad lineal de la carga del hilo es ρ.

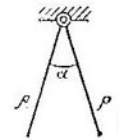


Para el problema 6.2.20*.



Para el problema 6.2.23.

6.2.22. Se sabe que en las inmediaciones de la superficie terrestre existe un campo eléctrico, cuya intensidad es del orden de 100 V/m. Propongan experimentos para medir este campo.



Para el problule 6.2.24.

6.2.23. En la figura se muestran un plano infinito $A'A$, con densidad superficial de la carga σ, y una bola de masa M, con la carga del mismo signo Q, sujeta al plano mediante un hilo. La bola se encuentra en equilibrio. Hállese la tensión del hilo y el ángulo α.

6.2.24. Estímese la densidad superficial de la carga σ en las placas de un electroscopio que se separan en un ángulo α, si $\alpha \ll 1$. La masa de la unidad de área de las plácas es ρ. Considérese que la distribución de la carga en las placas es uniforme.

§ 6.3. Presión eléctrica. Energía del campo eléctrico

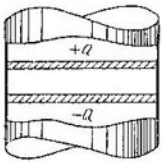
6.3.1. a) Las densidades superficiales de las cargas en dos planos son $\pm \sigma$. La distancia entre ellos es mucho menor que las dimensiones de los mismos. ¿Qué fuerza obrará sobre la unidad de la superficie del plano (presión eléctrica)?

b) La intensidad del campo eléctrico entre dos planos paralelos es nula, fuera de los planos es E. Determínese la densidad superficial de la carga en los planos. ¿Qué presión eléctrica incide sobre los planos?

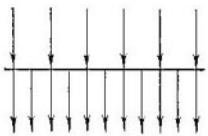
c) La intensidad del campo entre dos planos paralelos es de 10 000 V/cm, mientras que fuera de ellos es nula. Determínense la presión eléctrica sobre cada plano y la densidad superficial de la carga.

6.3.2. Dos émbolos electroconductores de área S en un tubo de material aislante forman un condensador plano, que contiene aire a presión atmosférica P_0. ¿Cómo cambiará la distancia entre los émbolos si les aplicamos cargas de signo diferente $\pm Q$? El sistema es buen conductor de calor y no hay fricción.

6.3.3. ¿A qué es igual la densidad superficial de la carga y la presión eléctrica en la superficie de separación de dos campos con intensidades $+E$ y $+2E$ o bien $+E$ y $-2E$? La densidad superficial de la carga en el segundo caso es 3 veces mayor. ¿Por qué entonces la presión eléctrica en los dos casos es igual?



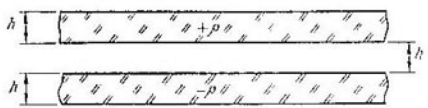
Para el problema 6.3.2.



Para el problema 6.3.3.

6.3.4. Dos láminas distan h y su grosor también es h. Las láminas tienen cargas de signos diferentes con densidad volumétrica $\pm \rho$.

a) Determínese la fuerza que actúa sobre un sector de la lámina con área unitaria. ¿Por qué dicha fuerza depende solamente de la



Para el problema 6.3.4.

carga eléctrica en el volumen destacado ρh y no es función del grosor de la lámina, si $\rho h = \text{const}$?

b) Demuéstrese que la fuerza eléctrica, que actúa sobre la parte destacada de la lámina cargada, es igual a $S\varepsilon_0 (E_1^2 - E_2^2)/2$, donde E_1 y E_2 son las intensidades del campo eléctrico homogéneo en la superficie de las láminas, perpendiculares a las láminas; S, el área de la parte destacada. ¿Por qué dicha fuerza no depende de la distribución de la densidad volumétrica para la carga eléctrica de la lámina $\rho(x)$, en tanto que depende de la carga global en la parte destacada de la lámina?

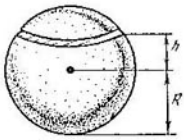
6.3.5. Determínese la fuerza que actúa sobre la unidad de superficie (presión eléctrica) de una esfera con radio R, cargada uniformemente mediante la carga Q.

6.3.6. a) Una esfera cargada uniformemente de radio R se corta en dos partes por un plano que dista h del centro de aquélla. La carga

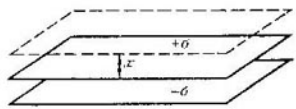
global de la esfera es Q. ¿Qué carga mínima es necesario colocar en el centro de la esfera para que las partes de ésta no se repelan?

b*) Hállese la fuerza con que se repelen mutuamente dichas partes de la esfera.

6.3.7. Dos láminas paralelas con cargas de signos opuestos permanecen a una distancia mucho menor que las dimensiones de las



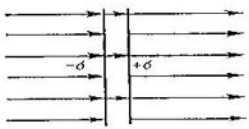
Para el problema 6.3.6*.



Para el problema 6.3.7.

láminas. La densidad superficial de las cargas en las láminas es $\pm\sigma$ y el área de cada una de las láminas es S. Demuéstrese que para separar estas láminas a la distancia x es necesario ejecutar un trabajo que es igual al volumen que llenará el campo eléctrico creado de nuevo de intensidad E, multiplicado por la densidad de la energía $\varepsilon_0 E^2/2$.

6.3.8. En un campo eléctrico homogéneo de intensidad E se sitúan perpendicularmente a la dirección del campo dos láminas planas con cargas de signos opuestos. Las densidades superficiales de las cargas de las láminas son $\pm\sigma$ y la distancia entre las mismas h es mucho menor que las dimensiones lineales de ellas. ¿Qué trabajo es necesario realizar para cambiar las láminas de sitio?



Para el problema 6.3.8.

Para el problema 6.3.9.

6.3.9. ¿Qué trabajo es necesario efectuar para instalar un sistema de láminas paralelas con cargas de signos opuestos en otro de la manera expuesta en la figura? La densidad superficial de las cargas en las láminas es $\pm\sigma$, el área de cada una de ellas es S y la distancia entre las mismas h es mucho menor que las dimensiones lineales de las láminas.

6.3.10. En un campo con intensidad E se sitúan, perpendicularmente a la dirección del campo, dos placas planas no conductoras

con cargas opuestas. La intensidad del campo dentro de las placas es E_1. ¿Qué trabajo es necesario realizar para colocar dichas placas paralelamente al campo exterior? El área de cada placa es S y la distancia entre ellas h es mucho menor que las dimensiones de las mismas.

6.3.11. Determínese la energía W del campo de cierta esfera cargada uniformemente de radio R. La carga de la esfera es Q.

6.3.12. La energía de cualquier sistema W está enlazada con su masa m mediante la relación de Einstein $W = mc^2$. Por lo tanto, el campo eléctrico posee masa. Supongamos que toda la masa del electrón es «eléctrica». Determínese el radio «clásico» del electrón, considerando que la carga del electrón está distribuida por su superficie. La masa del electrón $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg y la carga del electrón $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

6.3.13. En los experimentos que se llevan a cabo en los aceleradores de partículas se ha verificado que la interacción de los electrones hasta las distancias de 10^{-16} cm se someten a la ley de Coulomb. Haciendo uso de la solución del problema 6.3.12, determínese en cuánto la masa del campo eléctrico fuera de la esfera con radio de 10^{-16} cm supera la masa del electrón.

6.3.14* Determínese la energía del campo eléctrico de una esfera cargada uniformemente con radio R. La carga global de la esfera es Q.

6.3.15. ¿Qué trabajo contra las fuerzas eléctricas es necesario ejecutar para disminuir a la mitad el radio de una esfera cargada? El radio inicial de la esfera es R y la carga de la esfera, Q.

6.3.16. ¿Qué trabajo contra las fuerzas eléctricas es necesario realizar en la unidad de longitud de un sector de la superficie cilíndrica infinita con carga, para disminuir 3 veces el radio de dicha esfera? La densidad superficial de la carga del cilindro es σ y el radio inicial, R.

6.3.17. Un cuerpo junto con la carga, distribuida en él, se comprime de manera que todas las dimensiones lineales del cuerpo disminuyen n veces. ¿En cuánto aumentó la energía del campo eléctrico?

6.3.18. Una hoja, con forma de un triángulo isósceles rectangular y que está cargada uniformemente, se dobla por la mitad. Para ello se ha realizado el trabajo A contra las fuerzas del campo eléctrico. ¿Qué trabajo es necesario ejecutar para plegar de nuevo y de la misma manera el triángulo obtenido?

6.3.19. ¿En cuánto aumentará la energía del campo eléctrico de dos cargas puntuales Q, alejadas una de la otra a gran distancia, al acercarlas a la distancia a?

6.3.20. La intensidad del campo eléctrico entre dos esferas concéntricas con radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) es igual a E y está dirigida de modo radial, mientras que en el espacio restante no hay campo. ¿De qué manera se distribuye la densidad volumétrica de la carga eléctrica si $R_1 < r < R_2$? ¿Qué energía tendrá el campo?

§ 6.4. Conductores en un campo eléctrico continuo

6.4.1. a) ¿Por qué a una esfera cargada se atraen partículas de polvo metálicas ligeras?

b) A una carga eléctrica decidimos acercar dos palitos metálicos sin cargas: uno de ellos es largo y el otro, corto. Los extremos de los palitos están alejados a la misma distancia de la carga. ¿Cuál de los palos se atraerá a la carga con más fuerza?

Para el problema 6.4.1b.

c) ¿Puede la fuerza de interacción de dos esferas metálicas cargadas ser nula?

d) ¿Será posible, utilizando una bola con carga Q, cargar un conductor que tenga una carga superior a Q?

6.4.2. a) ¿Por qué el campo eléctrico dentro de un conductor es nulo?

b) Demuéstrese que la densidad volumétrica de la carga eléctrica en un conductor es nula.

c) ¿Por qué el campo eléctrico en la superficie del conductor es perpendicular a su superficie?

d) Haciendo uso de la ley de Gauss, demuéstrese que la densidad superficial de la carga de un conductor σ está ligada con la intensidad del campo eléctrico E en las inmediaciones del conductor mediante la relación $E = \sigma/\varepsilon_0$.

6.4.3. a) En la cavidad de una esfera metálica con radio R se encuentra cierta carga Q. Hállese la carga que induce dicha carga en la superficie de la esfera.

b) ¿Por qué en la superficie de la esfera la carga estará distribuida con densidad constante? ¿Cuál es la densidad superficial, si la carga global de la esfera es nula? Hállese la intensidad del campo eléctrico fuera de la esfera a la distancia L de su centro, si la carga global de la esfera es igual a Q. ¿Depende ese campo del lugar donde se encuentra la cavidad en la esfera o bien de su forma?

6.4.4. Una esfera metálica de radio R se coloca en una cavidad concéntrica esférica de radio $2R$ de otra esfera metálica, cuyo radio es igual a $3R$. Los centros de las esferas coinciden. La carga global de la esfera pequeña es Q y la de la esfera grande, $8Q$. Trácese la gráfica de la dependencia entre la intensidad del campo eléctrico y la distancia hasta el centro de las esferas.

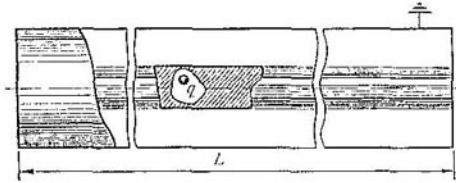
6.4.5*. En el seno de una cavidad de cierto conductor largo sin carga con radio r se encuentra una carga q. El conductor está rodeado por una pantalla cilíndrica de radio R. La longitud del conductor es $L \gg R$. ¿Cómo dependerá la intensidad del campo eléctrico fuera de la cavidad respecto a la distancia hasta el eje en la lejanía de los extremos del conductor?

6.4.6. En un campo eléctrico homogéneo de intensidad E se

pone una lámina metálica fina. El plano de la lámina es perpendicular a la dirección del campo eléctrico.

a) ¿Qué densidad superficial tendrá la carga en la lámina? ¿Qué presión eléctrica ejercerá sobre la superficie de la lámina?

b) El grosor de la lámina es h y su área, S. ¿Qué trabajo mínimo es necesario efectuar para sacar la lámina del campo eléctrico?



Para el problema 6.4.5*.

6.4.7. ¿Qué trabajo mínimo contra las fuerzas del campo eléctrico es necesario realizar para reunir una gota de mercurio con radio R y carga Q a partir de N gotas con cargas iguales?

6.4.8. a) En un campo eléctrico homogéneo de intensidad E se coloca una esfera metálica sin carga. Determínese la distribución de la densidad de la carga eléctrica por la superficie de la esfera. ¿Qué presión eléctrica máxima obrará sobre la superficie de la esfera?

b) En un campo eléctrico homogéneo de intensidad E se coloca un cilindro metálico sin carga. El eje del cilindro es perpendicular a la dirección del campo. Determínese la distribución de la densidad de la carga eléctrica por la superficie del cilindro. ¿Qué presión eléctrica máxima actuará sobre la superficie del cilindro?

Hágase uso de los resultados de la solución para los problemas 6.2.19*, 6.2.20*.

6.4.9*. En un campo eléctrico homogéneo se encuentra un conductor, cuya carga sumaria es nula. ¿Cambiará la densidad superficial de la carga del conductor, si disminuimos todas sus dimensiones n veces?

6.4.10*. Por analogía con el centro de masas puede introducirse el concepto de centro de las cargas. En un conductor aislado, cuya carga global es nula, designemos por x_0 la distancia entre los centros de las cargas negativas y positivas. El producto de x_0 por la parte positiva de la carga lleva el nombre de momento dipolar.

a) Determínese el momento dipolar de una esfera metálica de radio R en un campo eléctrico homogéneo con intensidad E. Determínese la relación entre este momento y la intensidad del campo eléctrico (dicha magnitud se llama polarizabilidad del conductor). ¿Cuál será la polarizabilidad de una lámina metálica fina con grosor

h y área S en un campo eléctrico, que es perpendicular al plano de la lámina?

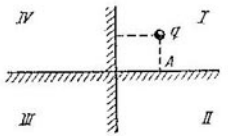
b) Las dimensiones lineales de un conductor aislado las disminuimos n veces. ¿Cómo cambiará la polarizabilidad del conductor?

6.4.11. Una carga puntual Q dista h de un plano metálico infinito. ¿Qué fuerza actúa sobre la carga por parte del plano? ¿Qué presión eléctrica máxima ejercerá sobre el plano?

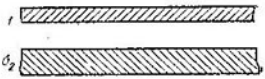
6.4.12. Determínense las fuerzas que actúan sobre cada una de las dos cargas Q que distan h del plano metálico y $2h$ una de la otra.

6.4.13. Una lámina cargada uniformemente con área S dista h de un plano metálico infinito, paralelo a aquélla. La densidad superficial de la carga en la lámina es σ, h es mucho menor que las dimensiones de la lámina. Determínese la carga en el plano metálico en la zona donde está cubierto por la lámina cargada y hállese la energía del campo eléctrico.

6.4.14. Dos planos conductores infinitos, al cortarse bajo un ángulo recto, dividen el espacio en cuatro zonas. En la zona I se encuentra la carga q a una misma distancia a de los dos planos.



Para el problema 6.4.14.



Para el problema 6.4.18.

a) ¿Existe el campo eléctrico en las zonas II, III, IV?

b) ¿Qué fuerza actúa sobre la carga q?

c) ¿Cuál es la presión eléctrica en la proximidad del punto A? ¿Con qué fuerza actúa la carga q en esta zona sobre la unidad de área de la superficie cargada?

6.4.15*. Estímese la fuerza que actúa sobre la carga q, situada en el centro de una envoltura esférica metálica aislada sin carga de radio R, si en ella hay un pequeño orificio de radio $r \ll R$. El grosor de la envoltura $\Delta \ll r$.

6.4.16*. Una carga puntual q dista L del centro de una esfera metálica asilada de radio R. La carga global de la esfera es nula. Demuéstrese que el campo eléctrico fuera de la esfera coincide con el campo que se obtiene mediante la superposición del campo de ciertas cargas $\pm Rq/L$ sobre el campo de la carga puntual q. Una de aquellas cargas se halla en el centro de la esfera, la segunda, en la recta que une el centro de la esfera con q, distando R^2/L del centro.

6.4.17. ¿Cómo cambiará la fuerza de interacción de una esfera metálica cargada con una carga puntual q que dista L del centro de aquélla, si la carga de la esfera aumenta en Q?

6.4.18. Dos placas aisladas conductoras e infinitas se cargan de manera que la carga sumaria por unidad de área de la superficie de los dos lados de la primera placa es igual a σ_1 y de la segunda, σ_2. Hállense las cargas por unidad de área en cada parte.

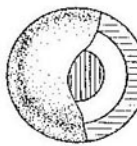
§ 6.5. Potencial del campo eléctrico

6.5.1. a) El potencial de una esfera metálica cargada es de 300 V. ¿Qué velocidad mínima debe poseer un electrón para escaparse de la superficie de la esfera a una distancia infinitamente alejada? La carga del electrón es de $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C y su masa es de $9 \cdot 10^{-31}$ kg.

b) Un protón, distando mucho del conductor, tenía la velocidad de 10^8 cm/s. El potencial del conductor es de 10 CGS. La trayectoria del protón termina en la superficie del conductor. ¿Qué velocidad tenía el protón en las inmediaciones de la superficie del conductor? La masa del protón es de $1{,}7 \cdot 10^{-24}$ g y su carga, $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ CGS.

6.5.2. Dos láminas A y D se ponen a tierra; las redes B y C tienen con respecto a la tierra los potenciales 200 y 100 V. De la

Para el problema 6.5.2.



Para el problema 6.5.5.

lámina A sale un electrón sin velocidad inicial. ¿A qué velocidades pasará a través de las redes B y C?

6.5.3 a) ¿Qué potencial tendrá el campo creado por una carga puntual q en el punto que dista r de la carga?

b) En los vértices del cuadrado con el lado a se hallan cuatro cargas q. ¿Cuál será el potencial del campo en el centro del cuadrado?

c) Una carga de 0,1 C está alejada de la carga de 0,2 C a la distancia de 20 m. ¿Qué potencial tendrá el campo en el centro del segmento que une las cargas?

d) Se dispone de las siguientes cargas: 100, 10, 1, -10, -1, -10 CGS, que se encuentran en los vértices de un hexágono regular con el lado de 2 cm. ¿Cuál será el potencial del campo en el centro del hexágono en SI y CGS?

6.5.4. Una esfera de radio R posee la carga Q. ¿Qué potencial tendrá el campo en el centro de la esfera? ¿Depende o no el potencial en el centro de la esfera de la distribución de las cargas en la esfera? ¿Depende o no el potencial del campo en cualquier punto de la superficie de la esfera de la distribución de la carga por la esfera?

6.5.5. Una esfera metálica de radio de 10 cm se coloca dentro de una capa metálica esférica, cuyo radio exterior es 30 cm y el grosor, 10 cm, de manera que sus centros coinciden. La esfera posee una carga de 10^{-5} C, en tanto que la capa tiene una carga de $8 \cdot 10^{-5}$ C. Trácese la gráfica de la dependencia entre el potencial (en voltios) y la distancia hasta el centro de la esfera.

6.5.6. El potencial de la esfera interior de radio r es nulo (la esfera está puesta a tierra). El potencial de la esfera exterior de radio $2r$ es igual a φ. Determínense las cargas de las esferas. Los centros de las esferas coinciden.

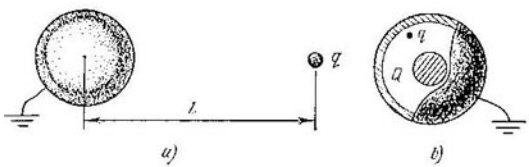
6.5.7. Tres esferas concéntricas de radios r, $2r$ y $3r$ poseen las siguientes cargas: $+q$, $+2q$ y $-3q$. Determínese el potencial de cada esfera.

6.5.8. a) Una esfera metálica de radio R_1 cargada hasta el potencial φ, está rodeada por una envoltura conductora concéntrica de radio R_2. ¿Cuál será el potencial de la esfera, si conectamos a tierra la envoltura exterior y si unimos la esfera con la envoltura mediante un conductor?

b) ¿Cómo cambiará el potencial de la esfera en el problema a), si la rodeamos con una capa metálica que posee el radio interior R_2 y el exterior R_3?

6.5.9. Hállese la carga límite de una esfera con radio R, irradiada por rayos ultravioletas, si los electrones a causa del efecto fotoeléctrico se desprenden con la energía cinética K. La carga del electrón es e.

6.5.10*. a) ¿Qué carga se induce en la superficie de una esfera metálica puesta a tierra por una carga puntual q que dista L del centro de aquélla? El radio de la esfera es R.



Para el problema 6.5.10*.

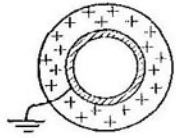
b) A la distancia L del centro de una esfera metálica cargada de radio R se encuentra una carga puntual Q_1. La carga global de la esfera es Q_2. ¿Cuál será el potencial de la esfera?

c) Una esfera metálica de radio R, cuya carga es Q, y una carga puntual q que dista L del centro de dicha esfera, se rodean por una capa metálica esférica, puesta a tierra, cuyo radio interior es $2L$ y el exterior, $3L$. Determínese el potencial de la esfera.

6.5.11*. Los ejes de dos superficies cilíndricas metálicas e infinitas coinciden. El radio de la superficie exterior es $2R$ y de la interior, R. La densidad superficial de la carga en la superficie interior es σ. La superficie exterior está puesta a tierra. Determínese el potencial de la superficie interior.

6.5.12. Una esfera de radio R está cargada uniformemente con una densidad volumétrica ρ. Hállese la dependencia entre el potencial de la esfera y la distancia hasta su centro.

6.5.13*. Un cilindro infinito de radio r posee una carga de densidad volumétrica ρ y está rodeado por una superficie metálica cilíndrica puesta a tierra de radio R, coaxial con el cilindro. Hállese la dependencia entre el potencial del campo para dicho sistema y la distancia hasta el eje del cilindro.



Para el problema 6.5.14.

6.5.14. Dentro de una esfera de radio R, cargada uniformemente con densidad volumétrica ρ, se encuentra cierta esfera metálica puesta a tierra, cuyo radio es r. Sus centros coinciden. Determínese la carga de la última. Hállese la dependencia entre el potencial del campo para dicho sistema y la distancia hasta el centro de la esfera.

6.5.15. a) Determínese la diferencia de potencial en el campo eléctrico entre los puntos *1* y *2*, si se sabe que un electrón, moviéndose en este campo eléctrico en ausencia de otras fuerzas, tenía en el punto *1* la velocidad de 10^6 cm/s y en el punto *2* la velocidad de $2 \cdot 10^6$ cm/s. ¿Cuál sería la velocidad del electrón en el punto *2*, si en el punto *1* su velocidad fuese nula?

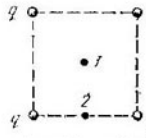
b) En un tubo electrónico los electrones «se aceleran mediante una diferencia de potencial» de 220 V. ¿Qué velocidad adquieren los electrones? ¿Qué diferencia de potencial debe haber para que la velocidad de los electrones sea $^1/_3$ de la velocidad de la luz (10^{10} cm/s)?

6.5.16. a) Dos placas metálicas paralelas con cargas de signos opuestos distan 1 cm, medida que es mucho menor que las dimensiones de las placas. La densidad superficial de la carga en las placas es de $\pm$ 3 CGS/cm^2. Determínese la diferencia de potencial entre las placas en SI y CGS.

b) Dos placas metálicas paralelas con cargas de signos opuestos distan 5 cm, medida que es mucho menor que las dimensiones de las placas. La densidad superficial de la carga de las placas es de $\pm$ 10^{-10} C/cm^2. Determínese la diferencia de potencial entre las placas en CGS y SI.

c) ¿Cuál será la diferencia de potencial entre las placas extremas en un sistema que consta de tres placas paralelas e infinitas con cargas que tienen la siguiente densidad superficial: $+\sigma$, $+\sigma$ y $+\sigma$; $+\sigma$, $-\sigma$ y $+\sigma$; $+\sigma$, -2σ y $+\sigma$; $+\sigma$, -4σ y $+3\sigma$? La placa central dista h_1 de la primera y h_2 de la tercera placa.

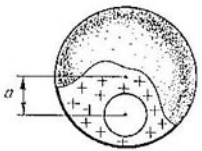
6.5.17. Cuatro cargas $q = 10^{-9}$ C se encuentran en los ángulos del cuadrado con el lado de 10 cm. Hállese la diferencia de potencial en el campo creado por estas cargas entre el centro del cuadrado (punto *1*) y el punto medio de uno de los lados del mismo (punto *2*).



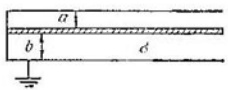
Para el problema 6.5.17.

6.5.18. a) ¿Cuál será la diferencia de potencial entre el centro y la superficie de la esfera con radio R y carga uniforme de densidad volumétrica ρ, así como entre el eje y la superficie de un cilindro infinito de radio R cargado uniformemente con densidad volumétrica ρ, y por último entre la superficie de una lámina plana con grosor h, cargada uniformemente con densidad volumétrica ρ, y el punto medio de la lámina?

b*) ¿Cuál será la diferencia de potencial entre el centro de la esfera, cargada uniformemente con densidad volumétrica ρ, y el centro de una cavidad esférica de radio r que dista a del centro de la esfera?



Para el problema 6.5.18b*.



Para el problema 6.5.19a.

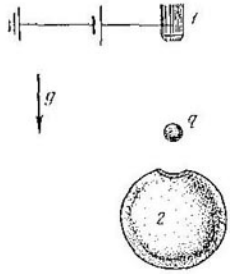
6.5.19. a) Entre dos láminas metálicas puestas a tierra se encuentra una película fina, con densidad superficial de la carga σ, la cual tiene las mismas dimensiones que las láminas. La distancia de ella hasta la lámina superior es a y hasta la inferior, b (a y b son mucho menores que las dimensiones lineales de las láminas). Hállese la intensidad del campo eléctrico en las cercanías de las láminas inferior y superior. Determínense las densidades superficiales de las cargas que se inducen en ellas.

b*) Entre dos láminas paralelas y conectadas a tierra, distando a y b de ellas, se encuentra cierta carga q. Las dimensiones lineales de las láminas superan considerablemente la distancia entre ellas. Demuéstrese que las cargas, inducidas en las láminas conectadas a tierra, no cambiarán si la carga q se distribuye por un plano, yacente entre las láminas a la misma distancia que la carga q. Hállense las cargas de las láminas.

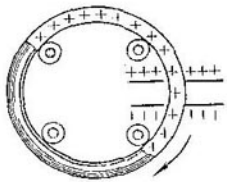
c) Hállese la intensidad del campo eléctrico entre tres láminas en el caso de que la lámina central esté conectada a tierra. Las distancias

entre la lámina central y las extremas son a y b. Los potenciales de estas últimas láminas son φ.

6.5.20. Del cuentagotas *1* a la esfera metálica hueca aislada *2* de radio R caen gotas de agua, a cada una de las cuales se le comunica una carga q. ¿Cuál debe ser la altura mínima de la caída de las gotas para que la esfera se llene del todo? El radio de la gota $r \ll R$.



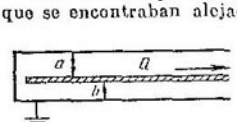
Para el problema 6.5.20.



Para el problema 6.5.21.

6.5.21. Un aro cargado positivamente se apoya sobre cuatro rodillos y puede girar. Una sección del aro atraviesa un orificio taladrado en dos láminas paralelas con cargas de signos opuestos. Según la idea del inventor, la sección del aro que se encuentra entre las láminas será atraída por la lámina negativa y se repelerá de la positiva, en tanto que fuera de las láminas el campo no existirá. Merced a ello se mantendrá la rotación del aro, incluso al haber resistencia al movimiento, o sea, se obtendrá un móvil perpetuo. ¿Qué error cometió el inventor?

6.5.22. Para juntar dos láminas idénticas con las mismas cargas, que se encontraban alejadas a gran distancia, es necesario realizar cierto trabajo A. ¿Qué trabajo será necesario efectuar para juntar tres láminas y n láminas de este tipo?

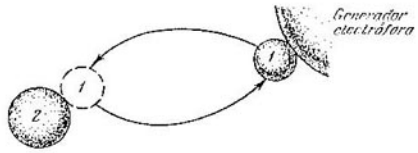


Para el problema 6.5.23.

6.5.23. ¿Qué trabajo es necesario realizar para sacar a medias una lámina conductora interior del sistema constituido por dos láminas paralelas y puestas a tierra? La carga de la lámina interior es Q. El área de las placas es S. Las distancias entre la lámina interior y las extremas son a y b.

6.5.24. La bola *1* puede cargarse hasta cierta carga Q mediante un generador electróforo. Luego, mediante el contacto con la bola *2*, la primera puede transmitirle a la segunda bola parte de la carga.

En el primer contacto a la bola 2 pasó la carga q. Determínese qué carga puede adquirir la bola 2 repitiendo reiteradamente el proceso.



Para el problema 6.5.24.

6.5.25. Al aproximar lentamente dos esferas metálicas idénticas con carga Q se realizó cierto trabajo A. Determínese el cambio de potencial en las esferas.

6.5.26. ¿Cómo cambiará la capacidad de un conductor aislado, si triplicamos sus dimensiones?

6.5.27. Determínese la capacidad de la esfera.

§ 6.6. Condensadores

6.6.1 a) ¿Qué es lo que llamamos condensador eléctrico? ¿Qué es de por sí la capacidad del condensador? ¿En qué se diferencia la definición de la capacidad de un conductor individual de la definición de la capacidad del condensador?

b) Las dimensiones de las placas de un condensador plano las aumentamos al doble. ¿Cómo cambiará la capacidad del condensador?

c) ¿Cómo cambiará la capacidad de un condensador plano, si duplicamos la distancia entre las placas y si la aumentamos n veces?

d) Determínese la capacidad de un condensador plano, si conocemos el área de las placas S y la distancia d entre las placas.

e) El área de las placas de un condensador plano es de 20 cm² y las placas distan una de la otra 3 mm. Determínese la capacidad del condensador en CGS y SI.

6.6.2. El área de las armaduras de un condensador plano es S y la distancia entre ellas es d.

a) ¿Cómo cambiará la capacidad del condensador, si entre sus armaduras se coloca una placa metálica de grosor $d/3$?

b) ¿Cómo se modificará la capacidad del condensador, si entre sus armaduras se coloca una placa metálica del mismo grosor, pero con un área $S' < S$?

c) ¿Cambiará la capacidad del condensador, si esta placa se pone en contacto con una de las armaduras?

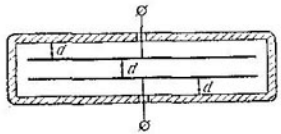
6.6.3. a) ¿Cómo se modificará la capacidad de un condensador plano, si lo colocamos en una caja metálica? La distancia entre las

armaduras hasta las paredes de la caja es igual a la distancia entre las armaduras d.

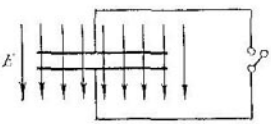
b) ¿Cómo cambiará la capacidad, si la caja se une con una de las armaduras?

6.6.4. a) Determínese la capacidad de un condensador, formado por dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 (condensador esférico).

b) Determínese la capacidad de un condensador esférico, si entre sus armaduras se coloca una capa esférica conductora de grosor $d < R_1 - R_2$. El radio de la superficie exterior de dicha capa es R_0.



Para el problema 6.6.3.



Para el problema 6.6.7.

6.6.5*. Hállese la capacidad de un condensador cilíndrico, compuesto por dos cilindros coaxiales de radios R_1 y R_2. La longitud de los cilindros $l \gg R_1, R_2$.

6.6.6. a) Hállense los valores límites de la capacidad para los condensadores esférico y cilíndrico, si se cumple la condición $R_1 - R_2 = \Delta R \ll R_1, R_2$. Compárese con la capacidad de un condensador plano.

b) Un condensador plano se confecciona de dos cintas de anchura a y longitud l. La distancia entre las cintas $d \ll a, l$. ¿Qué capacidad tendrá el condensador, si lo envolvemos en forma de un rollo, con la particularidad de que la cantidad de espiras $n \gg 1$ y el radio interior del rollo $R \gg d$?

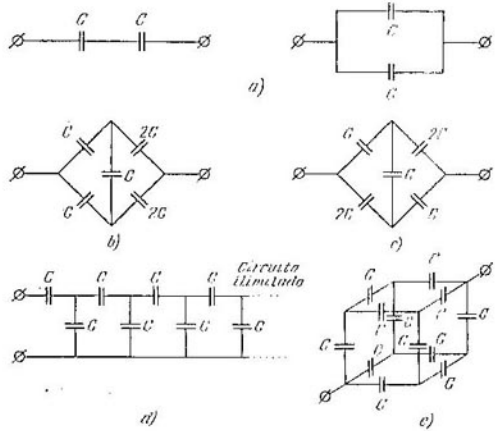
6.6.7. Un condensador plano se encuentra en un campo eléctrico homogéneo de intensidad E que es perpendicular a las placas. El área de las placas del condensador es S. ¿Qué cargas habrá en cada una de las placas, si el condensador se cortocircuita mediante un conductor?

6.6.8. Determínense las capacidades de los sistemas de condensadores, mostrados en la figura.

6.6.9. Dos condensadores planos se unen en paralelo. La capacidad de uno es C_1 y la del otro, C_2. Entre las placas de un condensador, exactamente en el centro, se instala una placa de área S y carga q. La placa se desplaza a la distancia x. ¿Qué carga circulará por los conductores en este caso?

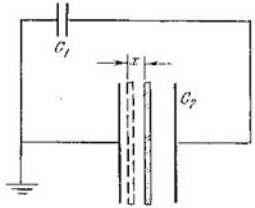
6.6.10. Hállese la energía del campo eléctrico de los siguientes condensadores, cargados hasta la diferencia de potencial V: a) de un condensador plano con área de las placas S, que distan d una de la otra, si el área de las placas es de 1 m², la distancia de 1 mm y la

diferencia de potencial entre las placas es de 1 kV; b) de un condensador esférico con radios de las esferas r_1 y r_2; c) de un condesador cilíndrico de longitud l y radios de las armaduras r_1 y r_2.

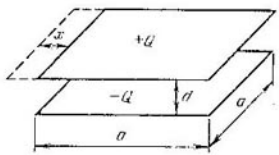


Para el problema 6.6.8.

6.6.11. ¿Cómo cambiará la energía de un condensador, si para la misma diferencia de potencial entre las placas modificamos todas sus dimensiones geométricas k veces? ¿Manteniendo las mismas dimensiones aumentamos la carga n veces? ¿Por cuenta de qué cambia la energía del condensador?



Para el problema 6.6.9.



Para el problema 6.6.12.

6.6.12. A las placas de un condensador plano se suministra la carga Q. El área de las placas es S y la distancia entre ellas es d.

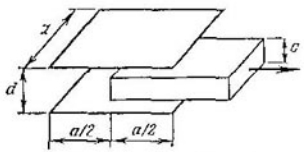
a) ¿Qué trabajo es necesario realizar para aumentar la distancia entre las placas en d?

¿Qué trabajo es necesario efectuar para desplazar las placas a la distancia x la una respecto a la otra? La distancia entre las placas permanece invariable. Las placas tienen forma de cuadrados.

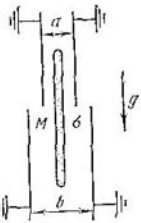
c) ¿Qué trabajo se realiza en los casos a) y b), si entre las placas del condensador se mantiene mediante una pila cierta diferencia de potencial constante? ¿Por qué estos trabajos serán diferentes?

6.6.13. Determínese (en newtones) la fuerza con que se atraen las placas de un condensador plano, si desconectamos la fuente de tensión que carga los condensadores hasta la diferencia de potencial de 1000 V. El área de las placas es de 100 cm² y la distancia entre las placas es de 1 mm. ¿Cambiará la fuerza de interacción de las placas, si la fuente de tensión está conectada permanentemente a las placas?

6.6.14. En un condensador plano con dimensiones de las placas $a \times a$ y que distan d se introduce una lámina conductora de grosor c y dimensiones $a \times a$. Determínese qué fuerza es necesario aplicar



Para el problema 6.6.14.



Para el problema 6.6.15*.

a la lámina para mantenerla en su sitio si: a) a las placas se suministran las cargas $\pm Q$; b) entre las placas se mantiene la diferencia de potencial constante V ($d \ll a$).

6.6.15*. Dentro de dos pares de placas metálicas puestas a tierra se encuentra una lámina fina no conductora que puede ser cargada uniformemente por toda la superficie. La masa de esta lámina es M y su anchura por la horizontal l. La distancia entre las placas puestas a tierra es a y b. Las dimensiones de las placas son mucho mayores que la distancia entre ellas. Todo el sistema se halla en posición vertical en el campo de gravedad. ¿En caso de mantener qué densidad superficial de la carga la lámina no conductora empezará a moverse hacia arriba?

6.6.16. Hállese la presión eléctrica sobre la superficie interior de un condensador esférico, cargado hasta una diferencia de potencial V. El radio exterior del condensador es R y el interior, r.

§ 6.7. Campo eléctrico en presencia de un dieléctrico

6.7.1. a) ¿Cómo se explica la reducción de la intensidad del campo eléctrico en una substancia?

b) ¿Qué es de por sí la constante dieléctrica (permitividad relativa) de la substancia?

c) ¿Cómo depende la constante dieléctrica del gas en función de su presión y de la temperatura?

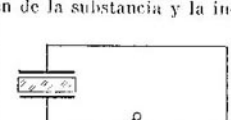
6.7.2*. a) Hállese el momento dipolar de una bola conductora de radio r, colocada en un campo eléctrico homogéneo de intensidad E.

b) El medio está compuesto por bolas conductoras de radio r. Las bolas están distribuidas uniformemente por el volumen. La cantidad de bolas en unidad de volumen es n. Hállese la constante dieléctrica del medio, menospreciando la influencia mutua de las bolas.

c) La constante dieléctrica del helio a temperatura 0 °C y presión de 1 atm es igual a 1,000074. Hállese el momento dipolar del átomo de helio en un campo eléctrico homogéneo de intensidad de 300 V/cm.

d) El radio del átomo de Ar es de 0,3 nm. Estímese la permitividad relativa del Ar a temperatura de 0 °C y presión de 1 atm.

6.7.3. El espacio entre las armaduras de un condensador plano se llena de cierto gas. La cantidad de moléculas en unidad de volumen es n y el momento dipolar de cada molécula, p_0. Los dipolos son rígidos, por eso en el campo eléctrico pueden sólo dar vueltas. La temperatura del gas es T. El área de las armaduras es S y la distancia entre ellas, h. Hállense para el caso $|\, p_0 E \,| \gg kT$: a) la intensidad del campo dentro del condensador y la diferencia de potencial entre sus armaduras, si a las placas se suministran las cargas $\pm Q$; b) el momento dipolar de la unidad de volumen de la substancia y la intensidad del campo E, si el condensador se conecta a una pila que mantiene en las armaduras del condensador la diferencia de potencial V. ¿Qué carga circulará en el circuito del condensador al eliminar por bombeo todo el gas del condensador?



Para el problema 6.7.4.

6.7.4. El condensador se llena de un dieléctrico y se carga hasta una diferencia de potencia V entre sus armaduras. El interruptor se cierra para un tiempo muy corto y se desconecta, cuando la diferencia de potencial en el condensador disminuye 3 veces. Después de ello esa diferencia aumenta lentamente hasta alcanzar el valor doble.

a) ¿Cómo puede explicarse el fenómeno expuesto?

b) Hállese la constante dieléctrica de la substancia que llena el condensador.

6.7.5. Un condensador plano (véase el problema 6.7.4) se descargó mediante el interruptor desde la diferencia de potencial V_0

hasta cero en el transcurso de cierto tiempo, durante el cual el estado de polarización del dieléctrico no cambió, acto seguido el interruptor fue puesto en la posición abierta. ¿Qué diferencia de potencial se establecerá en el condensador después de desconectar el interruptor, si la constante dieléctrica del medio es igual a ε?

6.7.6. a) ¿Cómo variará la capacidad del condensador, si el espacio entre sus armaduras se llena de un dieléctrico con permitividad ε?

b) Un condensador desconectado de la pila está cargado hasta una diferencia de potencial V. ¿Cómo cambiará la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador, si éste se le llena de un dieléctrico con permitividad ε?

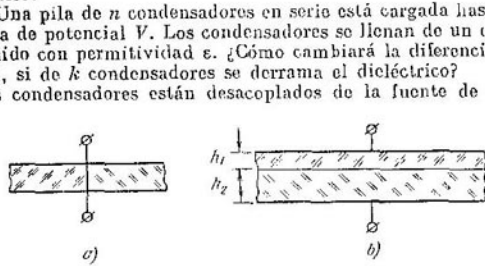
6.7.7. Un condensador de capacidad C está acoplado a una pila que mantiene en las armaduras del condensador la diferencia de potencial V. ¿Qué carga pasará a través de la pila al llenar el espacio entre las placas con un líquido cuya constante dieléctrica es ε?

Para el problema 6.7.8a.

6.7.8. a) Dos condensadores idénticos se llenan con un dieléctrico líquido con permitividad ε. Los condensadores se acoplan uno al otro en paralelo y se cargan hasta la diferencia de potencial V. ¿Cómo cambiará la diferencia de potencial, si de uno de los condensadores se derrama el dieléctrico? ¿Cómo se modificará la diferencia de potencial en la pila de n condensadores en paralelo, cargada hasta la diferencia de potencial V, si de uno de los condensadores se derrama el dieléctrico?

b) Una pila de n condensadores en serie está cargada hasta la diferencia de potencial V. Los condensadores se llenan de un dieléctrico líquido con permitividad ε. ¿Cómo cambiará la diferencia de potencial, si de k condensadores se derrama el dieléctrico?

Los condensadores están desacoplados de la fuente de tensión.



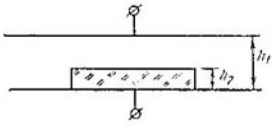
Para el problema 6.7.9.

6.7.9. a) El espacio entre las armaduras de un condensador plano está lleno de un dieléctrico que consta de dos mitades de las mismas dimensiones, pero con diferentes constantes dieléctricas ε_1 y ε_2.

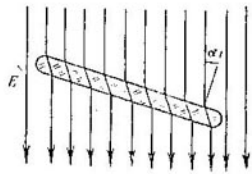
Hállese la capacidad de semejante condensador. El área de las placas del condensador es S y la distancia entre ellas, h.

b) El espacio entre las armaduras se llena de dos capas de dieléctricos de grosor h_1 y h_2. Las constantes dieléctricas de los dieléctricos son ε_1 y ε_2, el área de las placas es S. Hállese la capacidad del condensador.

6.7.10. Una placa dieléctrica de área S_2 y grosor h_2 se introduce en las armaduras de un condensador plano, cuya área de las placas es S_1 y las armaduras distan h_1. La constante dieléctrica de la placa es ε. Hállese la capacidad del condensador.



Para el problema 6.7.10.



Para el problema 6.7.11.

6.7.11. Una placa de dieléctrico con permitividad ε se coloca en un campo eléctrico homogéneo de intensidad E de manera que su normal forma un ángulo α con la dirección de la intensidad. Hállese la intensidad del campo dentro de la placa.

6.7.12. Ciertas cargas $\pm q$ se suministran a las armaduras de un condensador plano. El espacio entre las armaduras se llena de una substancia, cuya constante dieléctrica varía en la dirección x que es perpendicular a las armaduras según la ley $\varepsilon = \varepsilon_1 (1 + x/d)$, donde x es la distancia desde la placa positiva, d, la distancia entre las placas. Hállese la densidad volumétrica ρ de la carga como función de x. El área de las placas es S.

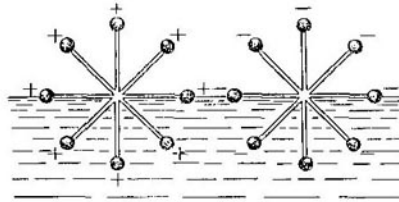
6.7.13. Una esfera de radio r y carga Q está rodeada por una envoltura esférica de radio R, como lo muestra la figura. La constante dieléctrica de la substancia de la envoltura es ε. Hállese la densidad superficial de las cargas en las superficies inferior y superior del dieléctrico. Trácense las líneas de la intensidad E del campo eléctrico. Trácese la gráfica de la dependencia entre la intensidad y el potencial del campo del sistema respecto a la distancia hasta el centro de la esfera.

6.7.14. La fuerza que actúa entre las bolas en un líquido con constante dieléctrica ε es ε veces menor que en el aire. Entonces, ¿por qué el «motor», mostrado en la figura, no funciona?

6.7.15. En un condensador plano se introduce una placa dieléctrica. ¿Con qué fuerza de tracción el campo del condensador actúa

sobre la placa? El área de las armaduras del condensador es S y las cargas son $\pm Q$. La constante dieléctrica del material de la placa es ε. ¿Cuál será la presión negativa dentro de la placa, inducida por el campo eléctrico del condensador?

Para el problema 6.7.13.

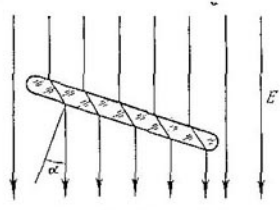


Para el problema 6.7.14.

6.7.16. ¿Cuál será la fuerza que atrae la placa dieléctrica hacia el condensador (véase el problema 6.7.15) cuando ésta penetra sólo hasta la mitad al espacio entre las armaduras? La altura de las placas h es un poco menor que la distancia entre las armaduras. Las dimensiones de las placas son $a \times b$.

6.7.17. En un campo eléctrico de intensidad E se introduce una lámina dieléctrica fina de grosor h y área S. La constante dieléctrica

Para el problema 6.7.15.



Para el problema 6.7.17.

de la substancia de la lámina es ε. ¿Cómo depende la fuerza, que actúa sobre la unidad de superficie del dieléctrico, respecto al ángulo α entre la normal a la lámina y la dirección de la intensidad? ¿Qué trabajo mínimo es necesario realizar para poner la lámina perpendicularmente al campo eléctrico?

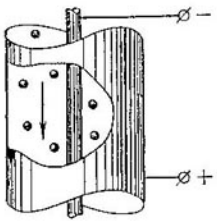
6.7.18*. El filtro eléctrico consta de un tubo metálico largo y un hilo, entre los cuales se crea cierta diferencia de potencial V. Por el tubo se deja pasar aire con polvo.

a) ¿Hacia qué electrodo se atraen las partículas de polvo?

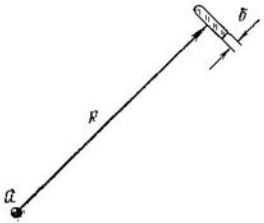
b) ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre una partícula de polvo con constante dieléctrica ε, si la fuerza que obra sobre otra partícula de polvo del mismo radio, pero con constante dieléctrica ε_1, es igual a F_1? Ambas partículas de polvo están alejadas a una misma distancia del hilo.

c) ¿Qué dependencia existe entre la fuerza que actúa sobre una partícula de polvo y la diferencia de potencial, así como la distancia hasta el hilo?

d) ¿En cuánto la fuerza que actúa sobre una partícula de polvo de radio R supera la fuerza que obra sobre otra partícula de polvo



Para el problema 6.7.18.



Para el problema 6.7.19*.

de radio r? La constante dieléctrica de las partículas de polvo es la misma y ellas se encuentran a igual distancia del hilo.

6.7.19*. A lo lejos de una carga puntual Q se halla una lámina dieléctrica de área S, con la particularidad de que sus dimensiones lineales son mucho menores que la distancia R entre la lámina y la carga. El plano de la lámina es perpendicular a la dirección de la carga. El grosor de la lámina es δ y la constante dieléctrica ε.

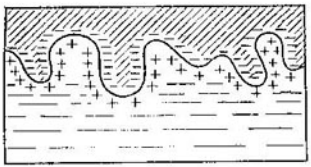
a) Hállese la fuerza con que la lámina se atrae a la carga.

b) ¿Será estable esta posición de la lámina con relación a giros pequeños?

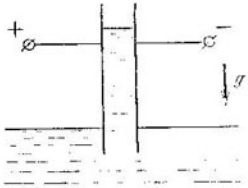
6.7.20*. Un condensador plano está lleno de cierto líquido, cuya constante dieléctrica es ε. El líquido penetra en las microasperezas de la superficie interior de las armaduras de la manera mostrada en la figura. La intensidad del campo eléctrico dentro del condensador es E. ¿Qué presión negativa crea el campo eléctrico en el líquido?

6.7.21. En un recipiente ancho que contiene cierto líquido se pone verticalmente un condensador plano de manera que la parte inferior de las placas del condensador penetre en el líquido. El condensador se une a una pila, que mantiene en las armaduras del condensador una diferencia de potencial V. La distancia entre las placas

del condensador es h, la densidad del líquido, ρ y la constante dieléctrica, ε. El líquido es incompresible. La tensión superficial es pequeña. ¿Hasta qué altura subirá el líquido en el condensador?



Para el problema 6.7.20*.



Para el problema 6.7.21.

6.7.22*. Una esfera metálica de radio r, cargada hasta el potencial V, está rodeada por una capa de dieléctrico líquido. El radio exterior de la capa del dieléctrico es R. ¿Qué presión ejercerá el dieléctrico sobre la esfera, si su constante dieléctrica es igual a ε? El metal no se moja por el dieléctrico. Menospréciese el campo de gravedad.

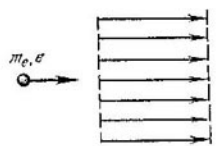
Capítulo 7

MOVIMIENTO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

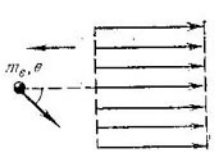
§ 7.1. Movimiento en un campo eléctrico constante

7.1.1. ¿En qué caso una partícula cargada se mueve en el campo eléctrico a lo largo de las líneas de fuerza?

7.1.2. Un electrón irrumpe en la zona de un campo eléctrico homogéneo de intensidad 200 V/m con la velocidad de 10^7 m/s.



Para el problema 7.1.2.



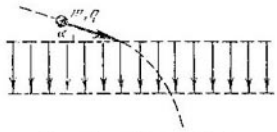
Para el problema 7.1.3*.

La velocidad está orientada a lo largo del campo eléctrico. ¿Cuánto tiempo el electrón se encontrará en esta zona del campo eléctrico? Determínese a qué distancia del lugar en que irrumpió el electrón

saldrá del campo, si entró formando un ángulo de 45° respecto a la dirección del campo.

7.1.3*. La zona con el campo eléctrico en las condiciones del problema 7.1.2 se desplaza al encuentro del electrón con una velocidad de $2 \cdot 10^7$ m/s. ¿Cuál deberá ser la anchura mínima de esta zona del campo eléctrico para la cual el electrón no atravesará esta zona? El electrón irrumpe bajo un ángulo de 45° con respecto a la dirección del campo.

7.1.4. Una partícula de masa m con carga $q > 0$ irrumpe en un condensador plano, cuyas armaduras son redes metálicas. La intensidad del campo en el condensador es E y la distancia entre las redes, d. La velocidad inicial v de la partícula forma un ángulo α



Para el problema 7.1.4.

Para el problema 7.1.6.

con el plano de la primera red. ¿Con qué velocidad y bajo qué ángulo respecto al plano de la segunda red saldrá la partícula del condensador?

7.1.5. Un protón y una partícula α, moviéndose a una misma velocidad, irrumpen en un condensador plano paralelamente a las placas. ¿En cuánto la desviación del protón debida al campo del condensador supera la desviación de la partícula α?

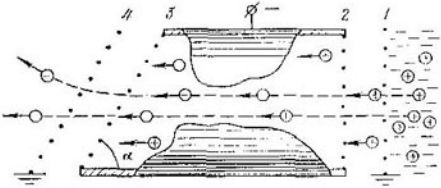
7.1.6. Las partículas con masa m y carga q entran en un condensador de longitud l bajo un ángulo α al plano de las placas y salen formando el ángulo β. Determínese la energía cinética inicial de las partículas, si la intensidad del campo dentro del condensador es E.

7.1.7. Un haz de electrones entra a una velocidad v en un condensador plano paralelamente a sus placas. La tensión en el condensador es U y la longitud de las placas en dirección del haz, l. ¿Cuántos electrones irán a parar a la placa del condensador por unidad de tiempo, si en la entrada del condensador el haz llena uniformemente toda la distancia d entre las placas y posee la anchura b en la dirección que es paralela a las placas? La cantidad de electrones en unidad de volumen del haz es n.

7.1.8. Una partícula de polvo de masa $m = 10^{-12}$ kg va descendiendo entre las placas de un condensador plano a una misma distancia de ellas. Debido a la resistencia del aire la velocidad de la partícula de polvo es constante e igual a 1 mm/s. El condensador se conecta a una fuente de tensión de 490 V y pasados 10 s la partícula de polvo alcanza una de las placas. Determínese la carga de la partícula de polvo. La distancia entre las placas del condensador es d

0,1 m. Considérese que la resistencia es proporcional a la velocidad de la partícula de polvo.

7.1.9. La figura muestra el esquema de separación de iones con signos opuestos de hidrógeno a partir de un haz. Las redes *1* y *4* están puestas a tierra. Al tubo con las redes *2*, *3* se aplica un potencial negativo. La red *2* arrastra los protones del plasma de hidrógeno que se halla detrás de la red *1*. El tubo se llena de gas. Los protones, atravesando el gas y capturando los electrones de las moléculas del gas, se convierten parcialmente en átomos neutros de hidrógeno H^0 y parcialmente en iones H^-. Determínese bajo qué ángulo

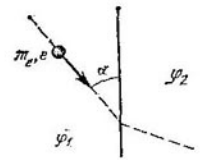


Para el problema 7.1.9.

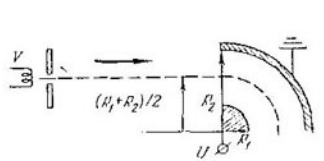
respecto al eje del tubo, se moverán los iones H^- detrás de la red *4*. El ángulo entre los planos de las redes *3*, *4* y el eje del tubo es α.

7.1.10*. Un electrón, moviéndose a una velocidad v_1, pasa de un semiespacio con potencial φ_1 a otro semiespacio con potencial φ_2. ¿Bajo qué ángulo a la superficie de separación se moverá el electrón en el segundo semiespacio, si se acerca a éste bajo el ángulo α?

7.1.11. Estímese al alcanzar qué diferencia de potencial entre los electrodos planos se enciende una lámpara de gas, si la energía



Para el problema 7.1.10*.



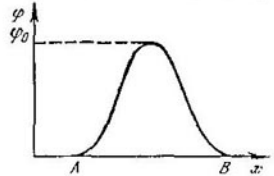
Para el problema 7.1.12*.

de ionización de los átomos del gas es de $3 \cdot 10^{-16}$ J. La longitud media del recorrido de los electrones en el gas es de 1 mm y la distancia entre las placas es de 1 cm.

7.1.12*. Determínese cuál deberá ser la diferencia de potencial aceleradora V para que los electrones sigan el camino indicado en la

figura. Los radios de las armaduras del condensador cilíndrico son R_1 y R_2. Adóptese que el campo en el espacio entre las armaduras coincide con el campo del condensador cilíndrico. La diferencia de potencial entre las armaduras es U.

7.1.13. Un electrón, moviéndose de modo rectilíneo, va a parar a un campo eléctrico, cuyo potencial tiene la forma mostrada en la



Para el problema 7.1.13.

Para el problema 7.1.14*.

figura. En el punto B el electrón sale del campo. ¿Cambiarán la velocidad de la partícula en el punto B y el tiempo en que atraviesa la distancia AB, si en lugar del electrón se trata de un positrón?

7.1.14*. Entre dos cargas fijas se introduce en el punto A una carga q. Esta carga cubre la distancia AB durante el tiempo t. ¿Durante cuánto tiempo pasará la carga $3q$ esta misma distancia, si se introduce en el punto A? Las masas de las cargas son las mismas.

Para el problema 7.1.15*.

7.1.15*. La figura muestra la trayectoria de un cuerpo de masa m y carga q que se mueve en un campo eléctrico. La velocidad del cuerpo en el punto A es v. ¿Qué velocidad en el punto A tendría un cuerpo de masa M y carga Q que en el campo eléctrico dado se moviese por la misma trayectoria?

7.1.16. Dos esferas de radio R poseen la misma carga Q, distribuida uniformemente por la superficie. ¿Qué energía mínima es necesario comunicarle a un electrón en la superficie de una de las esferas para que alcance la segunda? La distancia entre los centros de las esferas $l > 2R$.

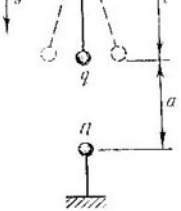
7.1.17*. En una esfera de paredes delgadas, no conductora con carga Q, distribuida uniformemente, que posee la masa M y el radio R, hay dos orificios pequeños diametralmente opuestos. En el instante inicial la esfera está en reposo. Por la recta que une los orificios se mueve del infinito con la velocidad v cierta partícula de masa m y carga q del mismo signo que Q. Hállese el tiempo durante el que la partícula se encontrará dentro de la esfera.

7.1.18. Un halterio inmóvil con bolas de masas m está situado de través al campo eléctrico de intensidad E. Las cargas de las bolas

del halterio son $\pm q$ y éstas distan entre sí l. Determínese la velocidad de las bolas en el instante en que el eje del halterio se encuentra a lo largo del campo.

7.1.19. Hállese el período de oscilaciones pequeñas de un halterio de longitud l con bolas de masas m, situado a lo largo de un campo eléctrico homogéneo de intensidad E. Las cargas de las bolas del halterio son $\pm q$.

7.1.20. Hállese el período de las oscilaciones pequeñas de un péndulo, que consta de una bola con masa m y carga Q, colgado de un hilo de longitud l, si lo colocamos en un campo eléctrico de intensidad E, dirigido: a) a lo largo del campo de gravedad; b) bajo un ángulo $\pi/2$ respecto a la dirección del campo de gravedad.

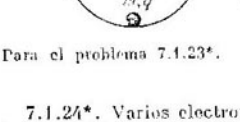


Para el problema 7.1.22.

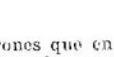
7.1.21. Un cuerpo con masa M y carga q se encuentra entre dos cargas fijas Q. La distancia entre el cuerpo y cada una de esas cargas es l $(Qq > 0)$. Determínese la frecuencia de las oscilaciones pequeñas del cuerpo a lo largo de la línea que une las cargas Q.

7.1.22. Hállese la frecuencia de las oscilaciones pequeñas de un péndulo matemático con respecto a su posición inferior de equilibrio, si a la distancia a por la vertical con relación a la posición de equilibrio de la bola se fija una carga Q. La longitud del hilo es l, la masa de la bola, m y la carga es q.

7.1.23*. Hállese el período de las oscilaciones pequeñas para un cuerpo de masa m y carga q situado dentro de una esfera lisa de radio R, si en el punto superior de la esfera se fija una carga Q.

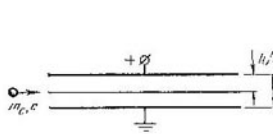


Para el problema 7.1.23*.


Para el problema 7.1.24*.

7.1.24*. Varios electrones que en la infinidad poseen la velocidad v, inciden sobre cierta esfera metálica aislada de radio R. ¿En cuánto se elevará la temperatura de la esfera, si su capacidad calorífica es igual a C?

7.1.25. Un electrón se acelera mediante la diferencia de potencial U y a continuación irrumpe en el espacio entre las placas del condensador. La distancia entre las placas es h y la longitud de éstas es $5h$. Estímese a qué distancia del condensador el electrón intersecará la continuación de la placa superior, sija las placas del condensador se les aplica la tensión de 0,01 U; 0,001 U. Menospréciese el desplazamiento del electrón en dirección vertical en el condensador.

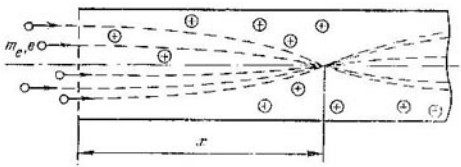


Para el problema 7.1.25.

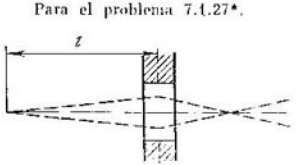
Para el problema 7.1.26*.

7.1.26*. Una de las placas del condensador plano emite electrones con energía K bajo un ángulo α respecto al plano de la placa (la dispersión angular de los electrones $\Delta\alpha$ es pequeña). El campo eléctrico del condensador obliga a los electrones dar la vuelta y éstos de nuevo van a parar a la placa. ¿Cuál debe ser el ángulo α para que la superficie, donde van a parar los electrones, sea la mínima? Estímese la extensión de la superficie.

7.1.27*. Un haz electrónico se enfoca mediante una carga volumétrica positiva de un haz iónico recto con sección circular. ¿A qué



Para el problema 7.1.27*.



Para el problema 7.1.29.

distancia x se enfocan los electrones, si su velocidad en la entrada es v y la carga de unidad de volumen para el haz iónico es ρ?

7.1.28*. ¿Por qué un sistema de electrodos axisimétricos enfoca, por regla general, un haz electrónico estrecho que pasa a lo largo del eje?

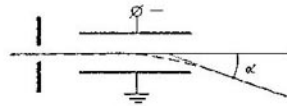
7.1.29. A la distancia l de la lente electrónica se emiten electrones bajo un pequeño ángulo con relación al eje de ésta. ¿A qué distancia se reunirán estos electrones, si un haz paralelo de la misma energía se reúne a la distancia f?

§ 7.2. Movimiento en un campo eléctrico alterno

7.2.1. Una de las placas de un condensador plano (el cátodo) es una fuente de electrones. El campo eléctrico de intensidad E entre las placas cambia de signo al cabo de lapsos breves e iguales τ. ¿Dentro de cuánto tiempo el electrón llegará hasta la placa opuesta (el ánodo)? La distancia entre el cátodo y ánodo es l.

7.2.2. La figura muestra los electrodos de un triodo plano. Los electrones se arrancan del cátodo K por la red plana 1, en la que se

Para el problema 7.2.2.



Para el problema 7.2.4.

mantiene una tensión constante U. La tensión ΔU entre las redes 1 y 2 cambia el signo por el opuesto al cabo de lapsos iguales τ. La distancia entre las redes 1 y 2 es igual a l.

a) Determínese qué velocidades tendrán los electrones detrás de la segunda red, si el tiempo τ es mucho menor que el tiempo en que los electrones pasan el intervalo entre las redes. b) Determínese qué velocidades tendrán los electrones detrás de la segunda red, si el tiempo supera en mucho el tiempo que necesitan los electrones para pasar el intervalo entre las redes.

7.2.3. En un generador electrónico se usa un triodo en el que el cátodo dista del ánodo 1 mm. Estímese la frecuencia máxima de las oscilaciones que puede obtenerse, al emplear dicho generador, si la tensión entre el ánodo y cátodo es de 200 V.

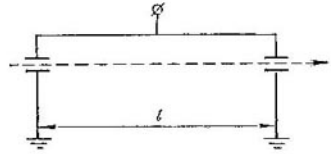
7.2.4. Hállese la dependencia entre el ángulo de desviación de un electrón y la dirección inicial del movimiento, provocada por el campo constante de un condensador plano mediante la tensión acelerante U. Considérese que el ángulo de desviación es pequeño.

7.2.5. a) Calcúlese la sensibilidad del tubo de rayos catódicos de un oscilógrafo con relación a la tensión, es decir, la desviación de la mancha en la pantalla, provocada por la tensión de 1 V en las placas de mando. La longitud de las placas es l; la distancia entre

ellas, d y la distancia desde el extremo de las placas hasta la pantalla, L. La tensión acelerante es U.

b) Determínese la sensibilidad del tubo de rayos catódicos (en mm/V), si $U = 10$ kV, $L = 30$ cm, $l = 3$ cm y $d = 5$ mm.

7.2.6. Un haz fino de electrones, acelerado por la tensión U, pasa sucesivamente los campos eléctricos de dos condensadores pequeños que distan uno del otro l. Los condensadores se unen en paralelo y se acoplan a una fuente de tensión alterna. Para la frecuencia de variación del campo f el haz, al pasar los dos condensadores,



Para el problema 7.2.6.

se mueve de modo paralelo a la dirección inicial. Estímese la relación posible entre la carga del electrón y su masa.

7.2.7. En un oscilógrafo al par horizontal de placas se le aplica la tensión $U_1 = U_0 \operatorname{sen} \omega t$ y al vertical, $U_2 = U_0 \cos \omega t$. La sensibilidad del oscilógrafo $S = 5/U_0$ cm/V. ¿Qué imagen surge en la pantalla del oscilógrafo?

7.2.8. ¿En caso de qué frecuencias de las señales eléctri cas la imagen en el oscilograma se deformará?

7.2.9. Al suministrar a las placas del oscilógrafo una señal de alta frecuencia, siendo ésta $\nu \gg 1/\tau$ (τ es el tiempo en que el electrón atraviesa las placas), en el oscilógrafo se obtiene una franja de anchura δ. La sensibilidad del oscilógrafo en el régimen corriente es S. Determínese la amplitud de la señal de alta frecuencia.

7.2.10*. Un electrón ligado elásticamente posee la frecuencia de resonancia ω_0. El factor de amortiguamiento de las oscilaciones es γ. Hállese la amplitud estacionaria de las oscilaciones forzadas del electrón en un campo eléctrico con intensidad $E_0 \operatorname{sen} \omega t$.

7.2.11*. Determínese la constante dieléctrica del medio que consta de electrones, ligados elásticamente en la molécula, en un campo eléctrico de intensidad $E_0 \operatorname{sen} \omega t$. La frecuencia de resonancia es ω_0, el factor de amortiguamiento $\gamma \ll \omega_0$ y la cantidad de moléculas en unidad de volumen es n.

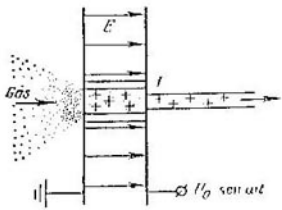
7.2.12. Desde el instante de tiempo $t = 0$ un campo eléctrico de intensidad $E_0 \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$ actúa sobre un electrón libre. Hállese la velocidad media del electrón.

7.2.13*. ¿Qué impulso máximo puede adquirir una partícula, que inicialmente se encontraba en reposo, con una carga q, si se co-

necta un campo eléctrico que varía según la ley armónica con frecuencia ω? La amplitud de la intensidad del campo es E_0.

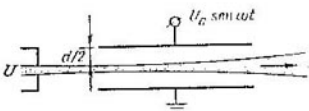
7.2.14. ¿Qué energía (en electrón-voltios) pueden adquirir los electrones en el campo eléctrico creado por un haz de láser? La amplitud de la intensidad del campo $E_0 = 10^{11}$ V/m y la frecuencia $\omega = 3 \cdot 10^{15}\ s^{-1}$.

7.2.15*. Una fuente simple para crear un haz iónico consta de un tubo de cuarzo, situado dentro de un condensador plano, a cuyas placas se aplica una tensión alterna U_0 sen ωt, que cebe la descarga del gas en el tubo. Del orificio I salen iones, cuya energía depende de U_0 y ω. Explíquese este fenómeno y determínese la energía de los iones. La distancia entre las placas del condensador es d y la masa de los iones $M \gg m_e$.

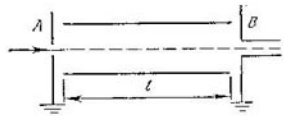


Para el problema 7.2.15*.

7.2.16*. Un haz fino de electrones, acelerado por la diferencia de potencial U, entra en un condensador plano paralelamente a sus placas. Determínese la dispersión angular de los electrones, si a las placas del condensador se aplica la tensión U_0 sen ωt. La distancia entre las placas del condensador d es mucho menor que la longitud del condensador l.



Para el problema 7.2.16*.



Para el problema 7.2.17.

7.2.17. El separador de velocidades de un haz electrónico consta de un condensador plano de longitud l, cerrado por dos lados con pantallas con un orificio de entrada A y un canal largo B. A las placas del condensador se aplica una tensión alterna con frecuencia ω y amplitud U_0.

a) ¿Qué velocidades separa el dispositivo del haz electrónico que irrumpe paralelamente a las placas?

b*) ¿En cuánto el orificio A debe ser más estrecho que el canal B para que un grupo de electrones con la velocidad máxima separada atraviese el canal? La distancia entre las placas es d.

7.3.1. ¿Qué velocidades tendrán dos electrones que distan λr ($\lambda > 1$) uno del otro, si comenzaron a desviarse desde la distancia r?

7.3.2. En los ángulos de un cuadrado regular con lado a se ubican cuatro electrones. Bajo la acción de las fuerzas eléctricas los electrones se dispersan. Determínense sus velocidades en la infinidad.

7.3.3*. En los ángulos de un cuadrado regular con lado a se colocan en las diagonales dos protones y dos positrones. Estímese la relación entre las velocidades de los protones y positrones en la infinidad. La masa del protón es 1840 veces mayor que la masa del positrón, mientras que las cargas son iguales.

7.3.4. De la infinidad dos electrones se mueven uno al encuentro del otro con las mismas velocidades v. Determínese la distancia mínima a la que se aproximarán.

7.3.5. Dos electrones se mueven de la infinidad con velocidades v_1 y v_2 uno al encuentro del otro. Determínese la distancia mínima a la que se aproximarán.

7.3.6. En dirección al centro de una esfera cargada inmóvil se mueve de la infinidad otra esfera cargada. Las cargas están distribuidas por la superficie de ambas esferas uniformemente. ¿Qué velocidad debe poseer la segunda esfera para chocar con la primera? La masa, carga y el radio de la primera esfera son iguales a m_1, q_1 y R_1, respectivamente. Los parámetros de la segunda esfera son m_2, q_2 y R_2.

7.3.7. Las velocidades v de dos electrones son iguales en módulo, yacen en un mismo plano y cuando distan a entre sí forman un ángulo α con la recta que los une. ¿A qué distancia mínima se acercarán los electrones?

7.3.8*. Dos electrones distan r el uno del otro, con la particularidad de que la velocidad de uno de ellos es nula y la velocidad del segundo está dirigida bajo un ángulo agudo hacia la línea que los une. ¿Cuál será el ángulo entre las velocidades de los electrones cuando ellos de nuevo resulten a la distancia r el uno del otro?

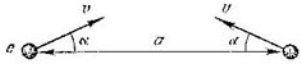
7.3.9*. Un cuerpo con masa m y carga q se mueve de la infinidad hacia un plano metálico. Determínese la velocidad del cuerpo en el instante en que el mismo diste d respecto al plano. La velocidad inicial del cuerpo es nula y sus dimensiones son mucho menores que d.

7.3.10*. Los vectores velocidades para tres partículas con masas m se ilustran en la figura. La distancia desde cada partícula hasta la arista de un ángulo diedro metálico es a. Las cargas de las partículas que se desplazan en direcciones contrarias son iguales a $-q$ y la carga de la tercera partícula es $+q$. Determínense las velocidades de estas partículas en la infinidad.

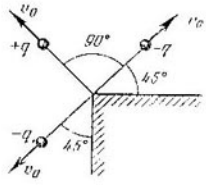
7.3.11. En uno de los modelos del ion H_2^+ el electrón se mueve describiendo una órbita circular, yacente en el plano de simetría del

ion. La distancia entre los protones es R. Hállese la velocidad con que se mueve el electrón por la órbita de radio r.

7.3.12. Un electrón gira por una órbita circular a la distancia r alrededor de cierto núcleo pesado con carga Ze. ¿Qué energía mínima será necesario comunicarle al electrón para que se desprenda del núcleo?



Para el problema 7.3.7.



Para el problema 7.3.10*.

7.3.13*. La distancia entre el electrón y positrón en un positronio es r. ¿Qué energía mínima es necesario comunicar al electrón para que el positronio se desintegre?

7.3.14*. Dos partículas de masas m y M con cargas opuestas se mueven describiendo circunferencias bajo la acción de la atracción eléctrica mutua. De repente aumentamos la velocidad de la partícula con masa m, n veces, sin cambiar su dirección. ¿Para qué n mínimo las partículas se dispersarán después de eso?

7.3.15*. Hacia un positronio en reposo se acerca un flujo de esas mismas partículas. ¿Qué velocidad mínima deberán tener las partículas en el flujo para que a veces tenga lugar una «desintegración» total de dos positronios que chocan? La velocidad del movimiento orbital de las partículas en el positronio es v.

7.3.16. ¿Podrá tener lugar la captura de un electrón por un protón libre (formación del átomo de hidrógeno), sin haber radiación?

7.3.17*. Hacia un protón en reposo se acerca otro protón que llega de la infinidad a la velocidad v. El parámetro de impacto es ρ. Determínese a qué distancia se aproximarán.

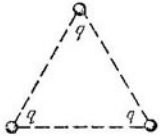
7.3.18*. Dos cargas se colocan a la distancia l la una de la otra y se dejan libres. Al cabo del tiempo t_0 la distancia entre las cargas se duplicó. Estas mismas cargas se ponen a la distancia $2l$ y se dejan libres. ¿Dentro de cuánto tiempo la distancia entre las cargas se duplicará?

7.3.19. Una partícula de masa m con carga q se mueve de una distancia grande en dirección al centro de una esfera cargada uniformemente que no está fijada. El radio de la esfera es R; la carga, Q; su masa, M. ¿Qué velocidad deberá poseer la partícula en la infinidad para poder atravesar la esfera?

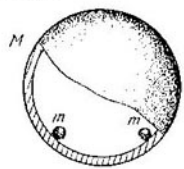
7.3.20. Una partícula con masa m y carga q se acerca a velocidad v_0 desde una distancia grande hacia cierto anillo cargado sin fijar, moviéndose por su eje. El radio del anillo es R; la carga, Q; su masa, M. El anillo estaba inicialmente en reposo. ¿Qué velocidad tendrá la partícula cuando atraviesa el centro del anillo?

7.3.21. Cierta partícula con masa m y carga q se acerca desde una distancia grande hacia una esfera cargada uniformemente sin fijar, moviéndose en dirección del centro de la esfera. El radio de la esfera es R; la carga, Q; su masa, M. La esfera estaba inicialmente en reposo. ¿Qué velocidad mínima debe tener la partícula en la infinidad para que atraviese el centro de la esfera?

7.3.22*. Tres cargas iguales q del mismo signo con masas m se unen con hilos de longitud l. Uno de los hilos se quema. Determínense las velocidades máximas de las cargas.



Para el problema 7.3.22*.



Para el problema 7.3.23.

7.3.23. Dentro de una esfera lisa dieléctrica (no conductora) de masa M y radio R se encuentran dos abalorios idénticos con cargas q y masas m. La distancia entre los abalorios es l. Hállese la velocidad máxima de la esfera, si soltamos los abalorios. Menospréciese el campo de gravedad.

7.3.24. Dos esferas cargadas con masas m y cargas q se unen con un resorte no deformado de longitud l y se dejan libres. Al cabo de cierto tiempo las vibraciones surgidas de las esferas cesaron, debido a la fricción en el resorte, y las esferas resultaron distar $2l$ la una de la otra. Determínese el calor que se desprendió en el resorte.

7.3.25. Una esfera de masa m y carga q se desintegra como consecuencia de una explosión en gran cantidad de fragmentos idénticos, cuya velocidad en el instante de explosión es v y está dirigida a lo largo del radio R de la esfera. Determínese la velocidad máxima de los fragmentos.

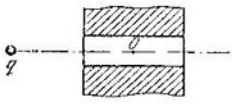
7.3.26. Contra una esfera en reposo de radio R y masa m choca otra esfera idéntica procedente de la infinidad a velocidad v. Hállense las velocidades de las esferas después de separarse. Las esferas son elásticas y conductoras. La carga de la esfera en reposo es Q y la de la que está en movimiento, q. Durante la colisión las cargas tienen tiempo de redistribuirse. La colisión es central.

7.3.27. Dos gotas idénticas de mercurio de radio R vuelan una al encuentro de la otra, teniendo en la infinidad velocidades v, igua-

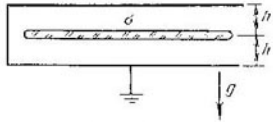
les en módulo. Tiene lugar un choque central, como resultado, las gotas se unen formando una. Determínese el calor que se desprendió durante la colisión si: a) las gotas poseen las mismas cargas en módulo, pero de signos opuestos $+Q$ y $-Q$; b) una gota posee la carga $+Q$ y la otra, $-q$. La densidad del mercurio es ρ y la tensión superficial, σ.

7.3.28. En el eje de un orificio cilíndrico practicado en una placa metálica, a cierta distancia de esta última, se encuentra una carga puntual q. La carga se deja libre. Descríbase de modo cualitativo su movimiento.

7.3.29. Una lámina fina, cargada con densidad superficial σ, se encuentra entre dos planos metálicos horizontales paralelos y pues-



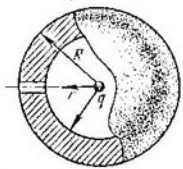
Para el problema 7.3.28.



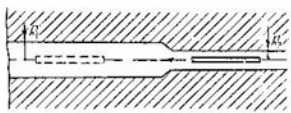
Para el problema 7.3.29.

tos a tierra a una misma distancia h de éstos. El área de la lámina es S y su masa, m. ¿Qué velocidad mínima es necesario comunicarle a dicha lámina para que ella alcance el plano superior? La distancia h hasta los planos es mucho menor que las dimensiones lineales de la lámina.

7.3.30. Dentro de una esfera conductora no cargada, pero bien fijada, de radio R hay una cavidad esférica de radio r, cuyo centro



Para el problema 7.3.30.



Para el problema 7.3.31.

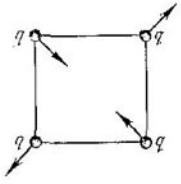
coincide con el centro de la esfera. ¿Qué velocidad mínima es necesario comunicarle a una partícula de masa m y carga q que se encuentra en el centro, para que, después de atravesar un canal fino en la esfera, se dirija a la infinidad?

7.3.31. A lo largo del eje de cierto canal cilíndrico largo, cortado en un conductor, pasa volando una barra fina, cuya carga por unidad de longitud es ρ. La longitud de la barra l es mucho mayor que los

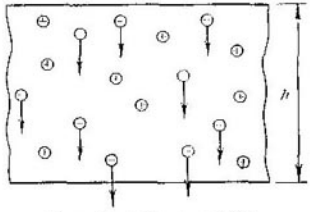
radios R_1 y R_2. A gran distancia de la zona de estrechamiento del canal a la derecha la velocidad de la barra es v_0. Hállese la velocidad de la barra en la lejanía de la zona de estrechamiento del canal a la izquierda. La masa de la barra es m.

7.3.32. Dos cuerpos con masas m y cargas Q se colocan en un plano horizontal distando R el uno del otro. Como consecuencia de la interacción eléctrica, los cuerpos comienzan a moverse por el plano. ¿Qué distancia recorrerá cada uno de los cuerpos, si el coeficiente de fricción entre los cuerpos y el plano es μ? ¿Qué velocidades máximas adquirirán los cuerpos durante el movimiento?

7.3.33*. ¿Cuál es el período de las oscilaciones pequeñas de cuatro cuerpos cargados, unidos mediante hilos iguales de longitud



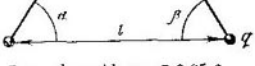
Para el problema 7.3.33*.



Para el problema 7.3.34*.

l de la manera expuesta en la figura? En esta misma figura se muestra el movimiento de los cuerpos durante las oscilaciones. La masa y carga de cada cuerpo son m y q.

7.3.34*. El plasma consta de electrones e iones pesados con cargas positivas. El número de electrones e iones en unidad de volumen es el mismo e igual a n. En la capa de plasma de grosor h a todos los electrones les comunican la misma velocidad v en dirección perpendicular a la capa. ¿Después de pasar cuánto tiempo la masa principal de electrones será detenida por las fuerzas eléctricas, si: a) $v \gg he\sqrt{n/m_e}$; b) $v \ll he\sqrt{n/m_e}$? Aquí e y m_e son la carga y la masa del electrón, respectivamente. Estímese en los dos casos la frecuencia de la oscilación de la «columna electrónica».



Para el problema 7.3.35.*

7.3.35*. Dos partículas idénticas con velocidades u y v, que forman ángulos α y β con la línea que las une, distan l la una de la otra. La carga de cada partícula es q. Determínense las masas de las partículas, si se sabe que la distancia mínima a la que se acercan es igual a a.

Capítulo 8

CORRIENTE ELÉCTRICA

§ 8.1. Corriente. Densidad de corriente. Corriente en el vacío

8.1.1. a) En un sincrotrón los electrones se mueven describiendo una órbita de 240 m de longitud. Durante el ciclo de aceleración en la órbita se encuentran aproximadamente 10^{11} electrones, cuya velocidad es prácticamente igual a la velocidad de la luz. ¿A qué es igual la corriente?

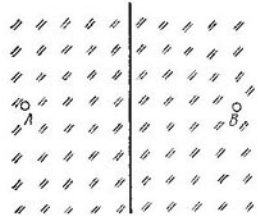
b) Determínese la corriente que crea un electrón que se mueve por una órbita de radio de $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ m en el átomo de hidrógeno. La carga del electrón $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C y su masa $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

8.1.2. Un alambre de longitud l posee una carga en movimiento igual a q, distribuida uniformemente por el alambre. Determínese la velocidad media del movimiento de las cargas, si la corriente es I.

8.1.3. En el generador de Van de Graaf (acelerador electrostático) una banda encauchada con 30 cm de anchura se mueve a velocidad de 20 m/s. En la proximidad de la polea inferior a la banda se le aplica una carga tan grande que por ambas partes de la banda crea un campo de intensidad de $1{,}2 \cdot 10^6$ V/m. ¿A qué será igual la corriente?

8.1.4. La corriente eléctrica en un conductor se crea por el movimiento de los electrones. Demuéstrese que las colisiones entre los electrones no cambian la corriente.

8.1.5. Si suponemos que la cantidad de electrones de conducción en el metal es igual al número de átomos, ¿cuál será la velocidad media de los electrones de conducción en un alambre de plata con 1 mm de diámetro, por el que circula una corriente de 30 A? Determínese esa velocidad para un semiconductor que posee una cantidad de electrones de conducción en unidad de volumen 10^8 veces menor.



Para el problema 8.1.8.

8.1.6. Una fina hoja metálica, cubierta de una substancia de radiactividad beta, emite de la unidad de área y electrones por unidad de tiempo. Hállese la densidad de la corriente.

8.1.7. En un flujo de partículas de polvo con radiactividad beta, que poseen la velocidad u, la cantidad de electrones, emitidos por las partículas de polvo en unidad de volumen, es n_e. Todas las direcciones de las velocidades de los electrones, respecto a la partícula

de polvo que los emitió, son equiprobables. Determínese el vector de densidad de la corriente eléctrica en el flujo.

8.1.8. Al punto A en cierto medio se le suministra una corriente I y del punto B se efectúa la toma de la corriente I. Considerando que cada punto crea independientemente una distribución estacionaria esféricamente simétrica de la corriente, determínese la densidad de corriente en el plano de simetría para los puntos A y B. ¿Cuál será la corriente total a través de ese plano? ¿Cómo cambiará la solución, si al punto B se le suministra la corriente I?

8.1.9. En un tubo de rayos X un haz electrónico con densidad de corriente de 0,2 A/mm^2 va a parar a un sector del extremo achaflanado de una barra metálica. El área de dicho sector es de 10^{-4} m^2 y el eje del haz forma un ángulo de 30° con la superficie del extremo. Determínese la corriente en la barra.

8.1.10. En un haz electrónico con densidad de corriente de 1 μA/cm^2 se coloca una esfera metálica de 10 cm de radio. Determínese el tiempo, durante el cual la esfera se carga hasta un potencial de 220 V. Considérese que hicho potencial es suficientemente pequeño en comparación con la energía cinética de los electrones, por lo que puede menospreciarse su influencia sobre el haz electrónico.

8.1.11. La densidad de corriente en el haz electrónico es j, la velocidad de los electrones, v. Determínese la densidad de la carga en el haz.

8.1.12. Las velocidades de los electrones en un haz electrónico de sección circular es de 10^{10} cm/s, el radio del haz, de 3 cm y la corriente total en el haz es de 100 A. Determínese la intensidad del campo eléctrico en la superficie del haz. Estímese a qué distancia el radio del haz aumenta al doble bajo la acción de su propio campo eléctrico.

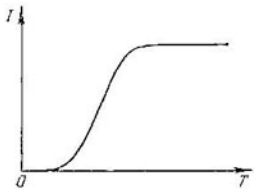
8.1.13*. Entre dos rejillas paralelas se crea un campo retardante de intensidad E. Por la normal hacia la rejilla delantera incide un haz electrónico ancho que posee en la entrada la densidad de carga ρ_0 y velocidad v_0. Menospreciando la interacción de los propios electrones, hállese la distribución de la carga entre las rejillas en caso de que: a) la velocidad de los electrones es suficientemente grande: b) los electrones son reflejados hacia atrás mediante el campo. ¿Empezando de qué ρ_0 en el segundo caso es necesario tener en cuenta el campo de la carga entre las rejillas?

8.1.14. Un diodo de vacío consta de dos electrodos: el cátodo, del que se «evaporan» los electrones (para lo cual lo calientan especialmente), y el ánodo, sobre el que inciden los electrones que salen del cátodo. Explíquese por qué el diodo puede usarse como rectificador. En la figura se muestra cómo, siendo constante la tensión entre el ánodo y cátodo, la corriente depende de la temperatura del cátodo. Explíquese cualitativamente la mencionada dependencia.

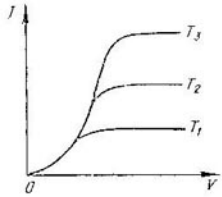
8.1.15. En la figura vienen expuestas tres gráficas de la dependencia entre la corriente y la tensión en los electrodos del diodo,

trazadas para diferentes temperaturas del cátodo. ¿Cuál de las curvas pertenece al cátodo de temperaturas bajas y cuál al cátodo de temperaturas altas?

8.1.16. Cuando la corriente en el diodo está lejos de ser la saturada, en la superficie exterior del cátodo se forma una capa fina de



Para el problema 8.1.14.



Para el problema 8.1.15.

electrones de la que la mayoría de los electrones retorna al cátodo y sólo una parte de ellos es arrastrada por el campo hacia el ánodo. ¿Por qué en la superficie de separación de esta capa el campo puede considerarse nulo?

8.1.17*. El cátodo y el ánodo en un diodo de vacío son de por sí dos placas metálicas paralelas con un huelgo de 0,5 cm entre ellos. El área de cada placa es de 10 cm^2. A tensión de 5000 V entre el cátodo y ánodo circula una corriente de 1 A. Considerando que el campo eléctrico entre las placas es homogéneo, determínese la densidad de la carga en función de la distancia hasta el cátodo x. Tómese la velocidad inicial de los electrones nula. ¿Se podrá en el caso en cuestión menospreciar la influencia de la carga espacial de los electrones sobre éstos?

8.1.18*. Para tener en cuenta la influencia de la carga espacial en un diodo plano, con la distancia d entre el ánodo y cátodo, es necesario establecer la dependencia de la densidad de la carga ρ, el potencial φ y la velocidad de los electrones v con relación a la distancia hasta el cátodo x. A corrientes lejanas de las de saturación, la velocidad e intensidad del campo en el cátodo pueden considerarse nulas. Para el caso en que el cátodo está puesto a tierra, búsquese el potencial en la forma $\varphi = V(x/d)^n$. Determínese de aquí $\rho(x)$ y $v(x)$ y luego, haciendo uso de la condición de que la corriente es estacionaria, hállese el exponente de la potencia n. Obténganse las expresiones exactas para la densidad de corriente y para la corriente a través del diodo, si se conoce la tensión V. El área de los electrodos es S.

8.1.19*. El ánodo y cátodo tienen forma arbitraria. Sea que a cierta tensión en el diodo, en régimen lejano del de saturación, entre los electrodos se establece una densidad de carga $\rho(x, y, z)$. ¿En

cuánto aumentará la densidad de esta carga, si aumentamos la tensión en el diodo n veces? ¿En cuánto aumentará la corriente del diodo?

§ 8.2. Conductibilidad. Resistencia. Fuentes de fem

8.2.1*. a) Determínese la conductibilidad específica (conductividad) del metal, si la cantidad de electrones de conducción en unidad de volumen es n_e y el tiempo entre las colisiones sucesivas del electrón con los iones de la red cristalina es τ. La carga del electrón es e y su masa, m_e. Inmediatamente después del choque cualquier dirección de la velocidad del electrón es equiprobable.

b) Estímese el tiempo medio entre las colisiones sucesivas del electrón de conducción con los iones de la red cristalina del cobre. La conductividad del cobre es de $6 \cdot 10^7$ [S/m, su densidad, de 8,9 g/cm^3 y la masa molecular es de 63,5. La cantidad de electrones de conducción y el número de átomos de cobre en unidad de volumen son iguales.

8.2.2*. Un contenedor, lleno de aire a temperatura ambiente y presión atmosférica, se irradia por un haz de rayos X que ionizan una pequeña parte de moléculas. Como iones negativos figuran las moléculas de O_2^- después de «capturar» un electrón. Las dimensiones del contenedor son $10 \times 10 \times 2$ cm^3; dos paredes de 10×10 cm^2 están fabricadas de metal, mientras que las demás, de un material aislante. A las paredes conductoras se aplica una tensión de 1000 V que produce una corriente de 1,5 μA. ¿Qué conductividad tendrá este gas débilmente ionizado? Adóptese que todas las moléculas tienen la misma masa molecular, la velocidad media de 500 m/s y la longitud del recorrido libre de 10^{-7} m. Considerando que la cantidad de iones positivos y negativos cargados una vez es la misma, determínese la parte de moléculas ionizadas del gas.

8.2.3. Bajo la acción de cierto campo eléctrico continuo en el conductor se establece una corriente continua, es decir, una velocidad media constante y no una aceleración constante. Ello significa la presencia obligatoria de una fuerza por parte de la substancia que obra sobre los portadores de corriente. Exprésese dicha fuerza a través de la conductividad de la substancia λ, la densidad de los portadores de corriente n_e, su velocidad media v y la carga e.

8.2.4. Un anillo de alambre de cobre con radio $R = 0{,}1$ m se impulsa hasta la velocidad angular $\omega = 10^3$ rad/s. Determínese qué corriente circulará a través del anillo al decelerar de modo uniforme su rotación hasta pararlo en el transcurso de $t = 10^{-3}$ s. La sección del alambre $S = 0.5$ cm^2 y la conductividad del cobre $\lambda = 6 \times 10^7$ S/m.

8.2.5. La velocidad media del movimiento dirigido de las cargas en los conductores no supera varios centímetros por segundo. Entonces, ¿por qué la lámpara de sobremesa se enciende inmediatamente después de oprimir el botón?

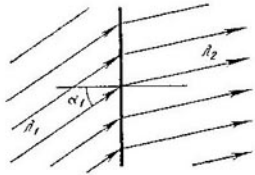
8.2.6*. Haciendo uso de la tabla de la conductibilidad térmica y la conductividad de una serie de metales a 0 °C, determínese su relación. ¿Cómo se explica el resultado obtenido? Hágase la prueba de calcular teóricamente la relación entre la conductibilidad térmica y la conductividad. La constante de Boltzmann $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Tabla para el problema 8.2.6*

Metales	$\varkappa$, W/(m·K)	λ, 10^7 S/m	ρ, 10^{-8} Ω·m
Cobre	385	6,0	1,7
Aluminio	210	3,2	3,1
Hierro	60	0,91	11
Plomo	34	0,5	20

8.2.7. La densidad de corriente en un conductor es j y su conductividad λ. Determínese la intensidad del campo eléctrico y la diferencia de potencial entre los puntos A y B, si la corriente fluye bajo un ángulo α respecto a la dirección de la recta AB. La distancia entre A y B es igual a l.

8.2.8. La densidad de corriente j es perpendicular al plano de la superficie de separación de dos medios con conductividades λ_1 y λ_2. Hállese la densidad superficial de la carga en este plano.



Para el problema 8.2.9.

8.2.9. Al plano de la superficie de separación de dos medios con conductividades λ_1 y λ_2 del primer medio pasan las líneas de corriente, formando el ángulo α_1 con la normal hacia el plano. ¿Qué ángulo forman las líneas de corriente en el segundo medio con dicha normal? ¿Cuál es la densidad superficial de la carga en el límite de la superficie de separación de los medios?

8.2.10. La conductividad del medio varía según la ley $\lambda = \lambda_0 a/(a + x)$. Determínese la densidad de la carga para la densidad estacionaria de corriente j, dirigida a lo largo del eje x.

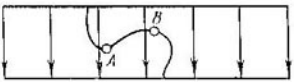
8.2.11*. Dentro del metal se encuentra una pequeña inclusión con otra conductividad. Esta inclusión cambia el campo eléctrico que en ausencia de aquélla sería homogéneo. Descríbase cualitativamente la variación del campo a distancias grandes con respecto a la inclusión. La corriente es estacionaria.

8.2.12*. En el centro de una esfera conductora con resistividad ρ resultó que se encuentra una carga excesiva Q_0. a) ¿Qué corriente circulará desde el centro de la esfera a su superficie? b*) ¿Cómo va-

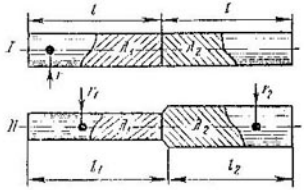
riará la carga en el centro con el correr del tiempo? ¿En qué lugar, al fin y al cabo, resultará estar la carga? Para resolver el problema, húgase uso del teorema de Gauss. ¿Significará la aparición de la carga superficial el hecho de que las cargas se han desplazado del centro de la esfera a la superficie?

8.2.13. Las placas de un condensador cargado se unen mediante un conductor fino encorvado. ¿Qué dirección tiene la corriente entre los puntos A y B? ¿Cómo concuerda eso con la dirección del campo en el condensador?

8.2.14. Un cilindro, hecho de una substancia conductora con conductividad λ posee una longitud l y sección transversal S. La



Para el problema 8.2.13.



Para el problema 8.2.15.

diferencia de potencial entre sus extremos es igual a U. Determínese la corriente a través de la sección del cilindro. ¿Qué resistencia tendrá?

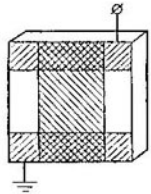
8.2.15. Dos barras largas están fabricadas de metales con conductividades λ_1 y λ_2. Entre los extremos de las barras se mantiene la diferencia de potencial U. Determínese la impedancia de cada una de las barras y las corrientes en ellas. ¿Para qué condiciones puede considerarse que las corrientes son paralelas a los ejes de las barras?

8.2.16. Cierto experimentador quiere obtener una capa de aluminio de grosor de 500 nm, espolvoreando el aluminio en el vacío sobre una superficie limpia de vidrio. Primero espolvorea una capa suficientemente gruesa, dejando en el centro una franja limpia, tapada con una máscara. Después, haciendo uso de otra máscara, espolvorea sobre el vidrio otra franja de la misma anchura de través al espacio. Las capas gruesas se utilizan al mismo tiempo como terminales para medir la resistencia. ¿Al lograr qué resistencia es necesario dejar de espolvorear, si la resistividad del aluminio a temperatura ambiente es igual a $2{,}83 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{cm}$?

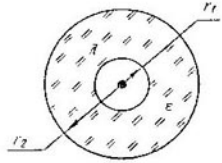
8.2.17. En un medio con pequeña conductividad λ se encuentra cierta esfera metálica de radio a. Determínese la corriente que se fuga de la esfera, si su potencial es igual a V. Si conectamos semejante esfera mediante un conductor aislado al pararrayos, ¿cuál será la resistencia de la puesta a tierra?

8.2.18. a) Dos electrodos —esferas metálicas de 30 cm de diámetro— están suspendidos en la mar, por medio de cables aislados, a la profundidad de 60 m. La distancia entre las esferas es de 300 m. La conductividad del agua de mar es igual a 4 S/m. Estímese la resistencia entre las esferas.

b) Existen sistemas, una de las partes de los cuales son sondas hechas de un conductor, que se sumergen en un medio con conducción débil y que tienen gran importancia en las investigaciones físicas, geofísicas y en gran cantidad de biológicas. Idéense experimentos en los que pueden utilizarse dichas sondas.



Para el problema 8.2.16.



Para el problema 8.2.19.

8.2.19. Los radios de las armaduras de un condensador esférico son r_1 y r_2 y las cargas, $\pm q$. Hállense la resistencia y la corriente de escape en este condensador, si entre las armaduras se encuentra cierta substancia con la constante dieléctrica ε y pequeña conductividad λ.

8.2.20*. Después de llenar un condensador con un medio, cuya conductividad es λ y la constante dieléctrica ε, la resistencia entre sus terminales resultó ser igual a R. Hállese la capacidad del condensador. ¿Dependerá el resultado de la forma de las placas?

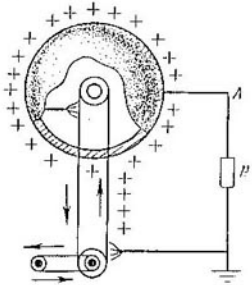
8.2.21*. Una lámina, fabricada de un material que es mal conductor, se mete entre dos electrodos. ¿Para qué posición de la lámina su resistencia es la mínima?

8.2.22. Al examinar las corrientes en una substancia, no se toma en consideración la energía de los portadores de corriente, ligada con su movimiento ordenado. Estímese la energía cinética de un electrón (en electrón-voltios) para la corriente $I = 100$ A en un alambre pequeño hecho de sodio metálico con sección $S = 1$ mm^2. La cantidad de electrones de conducción en unidad de volumen $n_e = 2{,}5 \times \times 10^{22}$ cm^{-3}.

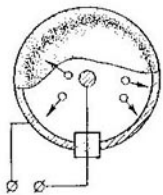
8.2.23. En el generador de Van de Graaf los portadores de carga, que se «adhieren» a la banda no conductora (aislante), se transportan contra el campo. Dentro de la esfera las cargas se retiran de la banda mediante un campo fuerte, localizado en la escobilla de contacto. La energía, indispensable para el movimiento de la banda, puede obtenerse recurriendo a un electromotor, a un motor de gasolina o a la fuerza de una persona que de vueltas a la manivela. Sea la carga

global en la banda q y su longitud l. Determínese el potencial φ en el punto A para dos casos: a) la banda se mueve a velocidad constante v independientemente de la resistencia R; b) la banda se mueve aplicándole una fuerza constante F.

8.2.24. Una pila eléctrica «atómica» es de por sí una esfera metálica con un pedacito de substancia con radiactividad beta, aislado de ella y situado en el centro de la esfera. La cantidad de átomos que



Para el problema 8.2.23.

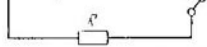


Para el problema 8.2.24.

se descomponen en unidad de tiempo es igual a ν. La energía de los electrones expulsados es W. Determínese la tensión en los bornes desconectados de la pila. ¿Para qué resistencias de la carga la tensión en la pila puede considerarse la misma? ¿Qué corriente máxima puede suministrar dicha pila? ¿Hasta qué resistencias de la carga la pila puede considerarse como generador de corriente?

8.2.25*. Una fuente de corriente consta de una lámina fina confeccionada de una substancia radiactiva, rodeada de un cuerpo

Para el problema 8.2.25*.

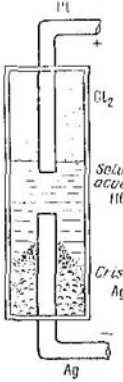


Para el problema 8.2.26.

conductor puesto a tierra. El huelgo entre el cuerpo y la lámina es mucho menor que las dimensiones lineales de la lámina. ¿Qué dependencia existe entre la corriente y la tensión en la fuente U, si la corriente de cortocircuito es I_0 y la energía de los electrones que abandonan la lámina, eU_0? Los electrones abandonan la lámina de modo isótropo.

8.2.26. Sin adentrarse en la cuestión sobre el origen de las fuerzas «exteriores», trácense las gráficas del potencial de dos circuitos, uno cerrado y el otro abierto, con resistencia R. En el sector de longitud l la fuerza exterior respecto a la unidad de la carga es igual a E_e, fuera de dicho sector, es nula. ¿Cómo cambiará la gráfica, si el sector l posee una resistencia r? ¿Qué energía por unidad de carga transmite la fuente de fuerzas exteriores en el sector l?

8.2.27. En un elemento químico tienen lugar las reacciones: $Ag\ (s) + Cl^- - e \rightarrow AgCl\ (s)$ en el electrodo negativo de plata y $^1/_2\ Cl_2 + e \rightarrow Cl^-$ en el electrodo positivo de platino (el platino no participa en la reacción). Siendo la corriente insignificante, para cada mol de AgCl que se forma se desprenden dentro del elemento 3280 cal de calor. Para la reacción $Ag + {}^1/_2 Cl_2 = AgCl$ por cada mol de AgCl que se forma se desprenden 29 380 cal. Hállese la fem del elemento, o sea, la energía que comunica el elemento a la unidad de la carga que pasa (1 cal $\approx 2{,}6 \cdot 10^{19}$ eV).



Para el problema 8.2.27.

8.2.28. Al disolver el cinc en H_2SO_4 se desprende cierto calor igual a $4{,}40 \cdot 10^5$ J/mol, para separar el cobre de $CuSO_4$ se requiere gastar la energía de $2{,}34 \cdot 10^5$ J/mol. Aparentemente la fem de la pila de Daniell puede calcularse igualando la diferencia de las energías de la carga que pasó, multiplicada por la fem. Calcúlese la fem de esta manera con una precisión de hasta 1 por 100. Sin embargo, el valor verdadero de la fem resulta ser mayor (a temperatura normal es igual a 1,09 V). ¿Qué es lo que ocurre? ¿De dónde aparece la energía?

8.2.29. La pila de Daniell da una corriente de 0,1 A durante 8 h. Hállese el gasto de cinc y vitriolo azul $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ (en moles). La constante de Avogadro $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

8.2.30*. Al descargar un condensador que posee la carga q a través de una cuba electrolítica con agua acidulada se desprende cierta masa m de gas detonante (oxhídrico). La masa de la substancia que se deposita durante la electrólisis depende solamente de la carga que pasa. Eso significa que descargando el condensador mediante k cubas unidas en serie, obtendremos la masa km de gas detonante. Quemando dicho gas, obtendremos gran cantidad de energía. ¡Siendo k suficientemente grande, la mencionada energía sobrepasará la energía inicial del condensador cargado! Por consiguiente, en algo nuestros razonamientos son erróneos. Búsquese el error.

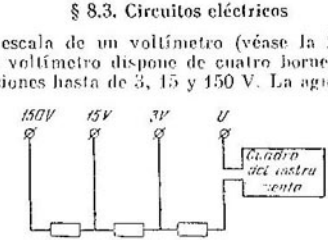
8.2.31. La densidad total de la corriente en los electrolitos es la suma de la corriente de los iones positivos y la corriente de los io-

nes negativos: $j = e_+ n_+ v_+ + e_- n_- v_-$, donde e es la carga del ion, $v_\pm$ y $n_\pm$ son las velocidades de los iones positivos y negativos y su cantidad en unidad de volumen, respectivamente. ¿Por qué la masa de la substancia que se deposita en el cátodo, es proporcional a la corriente total y no a la corriente $e_+ n_+ v_+$?

8.2.32*. La fuerza contraelectromotriz (fcem) de una cuba electrolítica es $\mathcal{E}$. Se dispone de un condensador, cargado hasta la tensión U ($U \gg \mathcal{E}$). ¿Cuántas cubas idénticas es necesario unir en serie para que al descargar el condensador obtener en ellas una masa máxima de metal de la solución de sal?

§ 8.3. Circuitos eléctricos

8.3.1. La escala de un voltímetro (véase la figura) tiene 150 divisiones. El voltímetro dispone de cuatro bornes, previstos para medir las tensiones hasta de 3, 15 y 150 V. La aguja del aparato se



Para el problema 8.3.1.

desvía en 50 divisiones al circular por él la corriente de 1 mA. ¿Qué resistencia interna posee el aparato al conectarlo para diferentes escalas?

8.3.2. ¿Qué shunt es necesario conectar a un galvanómetro con escala de 100 divisiones, una división de cuya escala es de 1 μA y su resistencia interna de 180 Ω, para que con su ayuda se puedan medir corrientes hasta de 1 mA?

8.3.3. Un voltímetro con escala de 100 V posee una resistencia interna de 10 kΩ. ¿Qué diferencia de potencial máxima puede medirse con dicho aparato, si le conectamos una resistencia complementaria de 90 kΩ?

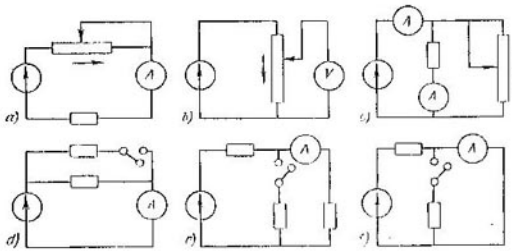
8.3.4. ¿Cómo reaccionarán los aparatos al desplazamiento del cursor del reóstato en dirección de las flechas en los circuitos a) ... c) y al cierre de los interruptores en los circuitos d) ... f)? Las resistencias internas de los generadores son muy pequeñas [1]).

8.3.5. a) Se requiere determinar la tensión en una resistencia R. Con ese fin a los extremos de la resistencia se conecta un voltímetro. ¿Qué error relativo cometeremos, si adoptamos las indicaciones del voltímetro como la tensión que había antes de conectarlo? La inten-

[1]) El generador en los circuitos se denota por medio de un redondel con una flecha. Esta última indica la dirección de la corriente del generador.

sidad de corriente en el circuito se mantiene constante. La resistencia del voltímetro es r.

b) Para medir la corriente en un circuito con resistencia R se conecta un amperímetro. ¿Qué error relativo cometeremos, si consideramos que la conexión del amperímetro no modificó la corriente?



Para el problema 8.3.4.

La tensión en los extremos del circuito se mantiene constante. La resistencia del amperímetro es r.

8.3.6. El voltímetro está conectado en paralelo a la resistencia $r_1 = 4\,\Omega$ y muestra 34,8 V. La tensión en los bornes de la fuente de corriente se mantiene constante e igual a 100 V. Hállese la relación entre la corriente que circula por el voltímetro y la corriente que pasa por la resistencia $r_2 = 6\,\Omega$.

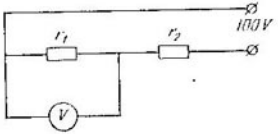
8.3.7*. Un dispositivo, previsto para la tensión de 20 V, debe alimentarse de la red con tensión constante de 120 V; además se requiere que al variar la resistencia del dispositivo desde 100 hasta 90 Ω la tensión en él cambie solamente en 1% por 100. ¿Será posible realizar eso, haciendo uso de un divisor de tensión? ¿Qué resistencias de los brazos es necesario elegir?

8.3.8. ¿Qué diferencia de potencial existirá entre los bornes (véase la figura)? ¿Qué indicará un amperímetro, si lo conectamos a los bornes[1])?

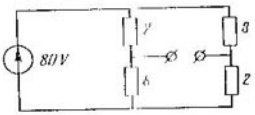
8.3.9. En el puente de Wheatstone las resistencias se eligen de manera que un galvanómetro sensible, al conectarlo a los puntos A y B, indique cero. Considerando que R_1, R_2 y r son conocidos, determínese la resistencia r_x. Si cambiamos de sitio la pila y el galvanómetro, se obtiene de nuevo un circuito en puente. ¿Se conservará el balance en el nuevo circuito?

8.3.10*. Una parte del circuito consta de resistencias incógnitas. Disponiendo de un amperímetro, un voltímetro, una pila y varios

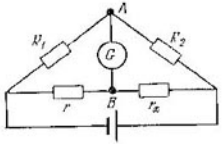
[1]) Las resistencias en las figuras se dan en ohmios sin indicar las unidades en los circuitos.



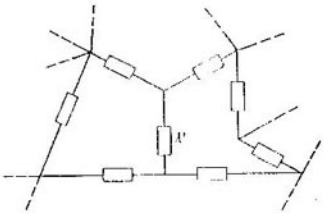
Para el problema 8.3.6.



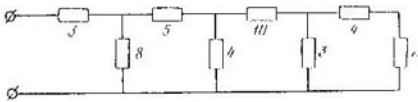
Para el problema 8.3.8.



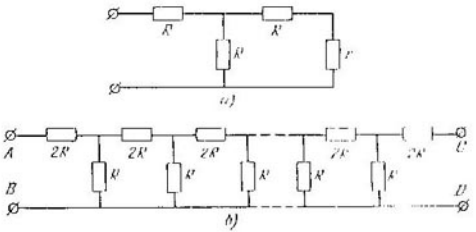
Para el problema 8.3.9.



Para el problema 8.3.10.



Para el problema 8.3.11.



Para el problema 8.3.12*.

conductores de conexión, ¿cómo podríamos medir la resistencia R sin interrumpir ni un solo contacto en el circuito?

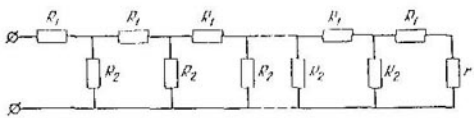
8.3.11. ¿Cuál es la resistencia entre los bornes en el circuito dado en la figura?

8.3.12*. a) ¿Cuál debe ser la resistencia r para que la resistencia de entrada entre los bornes sea también r?

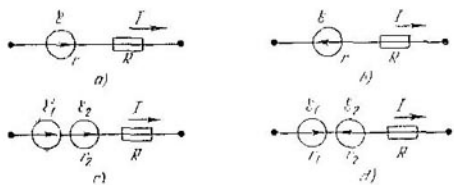
b) ¿Qué resistencia es necesario conectar a los bornes C y D para que la resistencia de toda la cadena entre los bornes A y B no dependa de la cantidad de células elementales?

c) La corriente de A hacia B es igual a I [véase el circuito b)]. Determínense las corrientes en la n-ésima célula, si la cadena de resistencias es infinita. ¿Cuál será la resistencia de semejante cadena?

8.3.13*. Un atenuador es de por sí un divisor especial de tensión, cuyo circuito viene mostrado en la figura. ¿Cuál debe ser la relación entre las resistencias R_1 y R_2 para que en cada resistencia vertical siguiente la tensión sea 10 veces menor que en la anterior?



Para el problema 8.3.13*.



Para el problema 8.3.14.

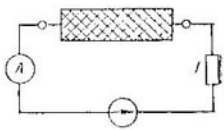
8.3.14. En la resistencia R por unidad de carga que pasa se disipa una energía igual a IR, independientemente de la dirección de la corriente I. El generador transmite, por unidad de carga que pasa por él, cierta energía (fem) $\mathcal{E}$, si el sentido de la corriente coincide con el de la intensidad de las fuerzas exteriores, y absorbe la energía $\mathcal{E}$, si sus sentidos son contrarios. Cuando la corriente circula por el generador, en la resistencia interna tiene también lugar la disipación de energía. Haciendo uso de los razonamientos energéticos, determínense las tensiones en los sectores de los circuitos expuestos en la figura.

8.3.15. Una pila con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r está acoplada a las resistencias R_1 y R_2, unidas en paralelo. Hállese la corriente

que pasa por la pila y la corriente que circula por la resistencia R_1. ¿Cómo cambiará la corriente que pasa por la resistencia R_1, si desconectamos la resistencia R_2? ¿Cómo cambiará esta corriente para el caso en que $r \ll R_1, R_2$?

8.3.16. Una pila que está acoplada a una resistencia de 10 Ω, da una corriente de 3 A, al acoplarla a la resistencia de 20 Ω, la corriente será de 1,6 A. Hállense la fem y la resistencia interna de la pila.

8.3.17. A un cajón con dos bornes se conecta un amperímetro, una resistencia de 1Ω y una fuente de tensión constante de 5 V. El amperímetro muestra una corriente de 1 A. Cuando se conecta otra fuente de tensión de 20 V, el amperímetro muestra una corriente de 2 A. ¿Qué hay dentro del cajón?



Para el problema 8.3.17.

8.3.18. Se llama generador ideal de tensión un generador en el que para cualquier carga la tensión se mantiene la misma. Se denomina generador ideal de corriente un generador que crea la misma corriente para cualquier carga. ¿Qué sentido tiene la siguiente afirmación: «El generador ideal de corriente posee una resistencia infinita y el generador ideal de tensión, una resistencia nula»? Un generador real de tensión pierde energía en la resistencia interna y es equivalente a un generador ideal de tensión con una resistencia unida en serie. Un generador real de corriente posee una resistencia finita de escape y es equivalente al generador ideal de corriente con una resistencia (shunt) unida en paralelo. Trácese el circuito de un generador de corriente con shunt interno, que sea equivalente a un generador con tensión de 120 V y resistencia interna de 20 Ω[1]).

8.3.19. En caso de cierta carga el generador entrega una corriente de 4 A a tensión de 120 V y para otra, una corriente de 2 A a tensión de 160 V. Hállense los parámetros de los circuitos equivalentes del generador de corriente y generador de tensión.

8.3.20. Al finalizar la carga de un acumulador a través de él circula una corriente de 4 A. La tensión en sus bornes es de 12,6 V. Después de la descarga del mismo acumulador mediante una corriente de 6 A, la tensión era de 11,1 V. Hállese la corriente de cortocircuito.

8.3.21. En el circuito se dan las resistencias R_1, R_2, R_3 y la corriente I_3 a través de la resistencia R_3. Determínense las corrientes que pasan por las resistencias R_1 y R_2 y la tensión en la pila.

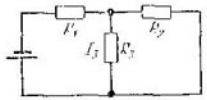
8.3.22. En el circuito se indican las resistencias (en ohmios) y la corriente que pasa por una de las resistencias. Determínense todas las corrientes y la tensión del generador.

---

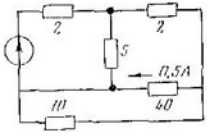
[1]) Se llama tensión del generador a la diferencia de potencial en la salida abierta del generador.

8.3.23. Haciendo uso de la simetría de los circuitos, resuélvanse los siguientes problemas:

a) Los lados de un cubo de alambre tienen las mismas resistencias r. La corriente en una de las aristas es i. Determínense la diferencia de



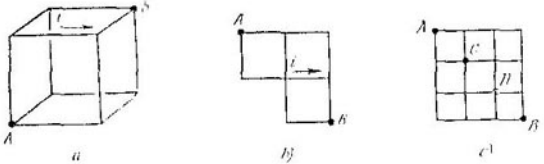
Para el problema 8.3.21.



Para el problema 8.3.22.

potencial entre los puntos A y B, la resistencia entre estos puntos y la corriente total de A a B.

b) Determínense las corrientes en todas las resistencias, la corriente total de A hacia B y la impedancia entre A y B. El lado de ca-



a *b)* *c)*

Para el problema 8.3.23.

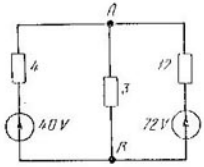
da célula tiene la resistencia r y la corriente en una de las resistencias es igual a i.

c) Cada lado del cuadrado posee la resistencia r. Determínese la resistencia entre los puntos A y B. ¿Cuál es la resistencia entre los puntos C y D?

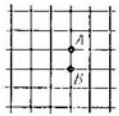
8.3.24. Al resolver los problemas con varias fuentes de fem, surge la tentación de calcular primero las corrientes, creadas por cada una de las fuentes de fem, luego buscar la corriente total como la suma de estas corrientes. Dicho procedimiento es bastante justo, si en los cálculos se toman en consideración las resistencias internas de las fuentes. Ese método se denomina método de la superposición. Determínese, haciendo uso de dicho método, la corriente entre los nodos A y B.

8.3.25*. a) Si en una red infinita con células cuadradas se suministra a través del nodo A cierta corriente i, en tanto que del nodo B se toma la corriente i, entonces ¿qué corriente circula por la resistencia que une los nodos A y B? ¿Cuál es la resistencia equivalen-

te de todo el circuito entre estos nodos si la resistencia del lado de la célula es r? ¿Cuál es la resistencia equivalente entre los nodos vecinos de una red cúbica, si la resistencia de la arista del cubo es r?



Para el problema 8.3.24.



Para el problema 8.3.25*.

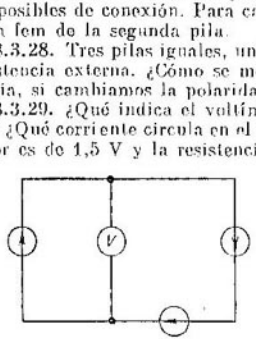
b) Determínese la resistencia entre los nodos de una red infinita bidimensional con células en forma de hexágonos regulares. El lado de cada célula tiene la resistencia r.

8.3.26. Dos pilas con fem $\mathcal{E}_1 = 20$ V, $\mathcal{E}_2 = 30$ V y resistencias internas $r_1 = 4\Omega$, $r_2 = 6\Omega$ se unen en paralelo. ¿Cuáles son los parámetros $\mathcal{E}$ y r para el generador que puede sustituir dichas pilas sin cambiar la corriente en la carga?

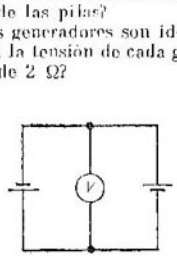
8.3.27. Dos pilas con las mismas resistencias internas están unidas de manera que la fem de la fuente de tensión que se forma es igual a $\mathcal{E}$. La fem de una de las pilas es $^3/_2\mathcal{E}$. Trácense todos los circuitos posibles de conexión. Para cada uno de los circuitos determínese la fem de la segunda pila.

8.3.28. Tres pilas iguales, unidas en paralelo, se conectan a una resistencia externa. ¿Cómo se modificará la corriente en esta resistencia, si cambiamos la polaridad de una de las pilas?

8.3.29. ¿Qué indica el voltímetro, si los generadores son idénticos? ¿Qué corriente circula en el circuito, si la tensión de cada generador es de 1,5 V y la resistencia interna de 2 Ω?



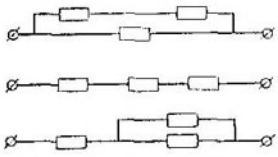
Para el problema 8.3.29.



Para el problema 8.3.30.

8.3.30. Hállense las indicaciones del voltímetro, si la resistencia de una de las pilas es de 3 Ω y la de la otra, de 1 Ω. La fem de cada pila es de 1,5 V.

8.3.31. Un hornillo eléctrico tiene tres secciones con las mismas resistencias. Al unirlas en paralelo, el agua empieza a hervir en la tetera pasados 6 min. ¿Dentro de cuánto tiempo empezará a hervir el agua de la misma masa y a la misma temperatura inicial al unir las secciones como viene mostrado en la figura?



Para el problema 8.3.31.

8.3.32. Se dispone de un alambre con resistencia R, a través del cual puede dejarse pasar la corriente máxima I sin riesgo de quemarlo. ¿Qué potencia máxima puede tener un calentador eléctrico, fabricado de este alambre, si se conecta a la red con tensión $U \ll IR$? El alambre, puede cortarse en pedazos, uniendo éstos en serie y en paralelo.

8.3.33. Dos hornillos eléctricos, conectados en paralelo a la *red*, consumen la potencia N_1. ¿Qué potencia consumen estos hornillos, conectados en serie, si uno de ellos consume la potencia N?

8.3.34. En una batería de acumuladores (pila) usada, que consta de n recipientes unidos en serie con una resistencia interna r, la resistencia de uno de los recipientes aumentó bruscamente hasta 10 r. Considerando que todos los recipientes tienen la misma fem, determínese para qué resistencias de la carga la potencia liberada en la carga no variará al cortocircuitarse algún recipiente deteriorado.

8.3.35. El acumulador se acopla una vez con un circuito externo con resistencia R_1 y otra vez, con R_2. Mientras tanto, la cantidad de calor que se desprende en el circuito exterior en unidad de tiempo, es la misma. Determínese la resistencia interna del acumulador.

8.3.36. Compárense las tensiones en los bornes, así como las potencias desarrolladas en el circuito exterior por: una pila de 50 elementos, unidos en serie y que poseen una fem de 2 V cada uno, si el circuito exterior tiene una resistencia del elemento de 0,2 Ω; y una máquina electrófora, que crea en los conductores esféricos una diferencia de potencial de 100 kV y que posee una resistencia interna de 10^8 Ω, si la misma se conecta a un circuito exterior con resistencia de 10^5 Ω. ¿Cómo cambiarán las corrientes y las potencias en los circuitos exteriores, si las resistencias de los circuitos exteriores se duplican?

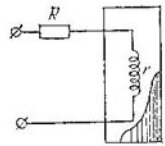
8.3.37. Se requiere transmitir de cierta fuente de tensión de 10 kV una potencia de 500 kW a la distancia de 5 km. La pérdida tolerable de la tensión en los conductores es del 1 por 100. ¿Qué sección mínima deberá tener el conductor de cobre? ¿En cuánto es necesario aumentar la tensión de la fuente con el fin de disminuir 100 veces las pérdidas de potencia en la misma línea para transmitir la misma potencia?

8.3.38. ¿Cómo depende la potencia, que se disipa en la resistencia interna, de la corriente I? La tensión del generador es $\mathcal{E}$ y la

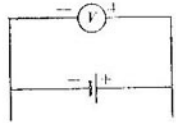
resistencia interna, r. ¿A qué resistencia le corresponde la potencia máxima?

8.3.39. ¿Qué potencia máxima puede obtenerse de un generador con fem de 100 V y resistencia interna de 20 Ω? ¿Qué potencia puede desarrollar ese mismo generador para el rendimiento del 80 por 100? Si la corriente máxima admisible a través del generador es 0,1 de la corriente de cortocircuito, ¿qué potencia máxima puede obtenerse del generador sin temer que éste se estropee?

8.3.40*. A un termóstato es necesario suministrarle calor a velocidad constante. Durante el experimento en el termóstato varía



Para el problema 8.3.40*.



Para el problema 8.3.42.

la temperatura, lo que provoca el cambio de la resistencia de la espiral de caldeo. Es necesario hacer que la potencia, disipada en la resistencia de la espiral r, casi no cambie, siendo pequeñas las variaciones de r. Trácese la gráfica de la dependencia entre la potencia y r, así como determínese, haciendo uso de esta gráfica, para qué relación entre R y r se logra conseguir la insensibilidad deseada de la potencia.

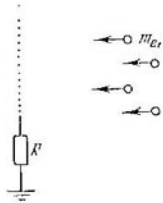
8.3.41. Un acumulador con fem $\mathcal{E}$ se carga en una estación eléctrica en cuya red la tensión es U. La resistencia interna del acumulador es r. Determínese la potencia útil que se gasta para cargar el acumulador y la potencia que corresponde al desprendimiento de calor en él. ¿Cuál de las potencias del acumulador, la útil o la térmica, es mayor? ¿Por qué al realizar, la carga rápida del acumulador es necesario prestar atención especial al desprendimiento del calor?

8.3.42. Una pila con fem de 4 V y resistencia interna de 1 Ω forma parte de un circuito desconocido. A los polos de la pila está conectado un voltímetro que indica la tensión +6 V. Determínese la cantidad de calor que se desprende en unidad de tiempo en la resistencia de la pila.

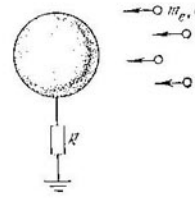
8.3.43. En un condensador esférico de capacidad C se mantiene la tensión constante U. Determínese la cantidad de calor que se desprende en unidad de tiempo en el condensador, si la conductividad del medio que llena el condensador es λ y la constante dieléctrica, $\varepsilon \approx 1$.

8.3.44. Una sonda en forma de una red de cobre, conectada a tierra a través de la resistencia R, se somete al bombardeo por un

haz electrónico perpendicular que a gran distancia de la sonda posee la velocidad v. Determínese el calor que se desprende en unidad de tiempo a causa del bombardeo de la sonda por los electrones, si la corriente de puesta a tierra es igual a I.



Para el problema 8.3.44.



Para el problema 8.3.45*.

8.3.45*. Una esfera de radio a se une a través de la resistencia R con la tierra. Hacia la esfera de la infinidad irrumpe un haz electrónico a velocidad v y con cantidad de partículas en unidad de volumen n_e. Determínese la carga límite de la esfera. Considérese la velocidad de las partículas grande (medítese en comparación con qué magnitud).

8.3.46*. El flujo de calor procedente de la espiral de un hornillo eléctrico depende linealmente de la diferencia de temperaturas de la espiral y el aire ambiente: $N = \varkappa (T - T_0)$. La resistencia de la espiral también depende linealmente de dicha diferencia: $R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$, donde R_0 es la resistencia de la espiral a temperatura ambiente. ¿Hasta qué temperatura se calentará la espiral por la corriente I, si $\varkappa > I^2 R_0 \alpha$.

§ 8.4. Condensadores y elementos no lineales en los circuitos eléctricos

8.4.1. En la figura vienen expuestos varios esquemas de circuitos de corriente continua con condensadores.

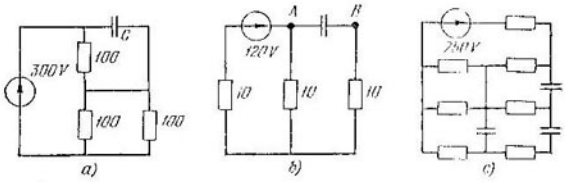
a) Determínese la carga del condensador de capacidad $C = 4\ \mu F$ en régimen estacionario.

c) ¿Cuál es la tensión entre los puntos A y B en régimen estacionario? ¿Qué indicará el voltímetro con una resistencia interna de 5 kΩ al conectarlo hacia A y B?

c) Determínense las tensiones estacionarias en todos los condensadores si todas las resistencias son iguales.

8.4.2. Para medir las tensiones se utilizan voltímetros de dos tipos: electromagnéticos, que miden la tensión de la corriente que circula por el marco del aparato, y electrostáticos cuyo circuito aproximado se ofrece en la figura. A dos placas paralelas a través de

un tapón aislante se conecta un conductor. Las placas se mantienen en su lugar mediante un resorte de rigidez k. El potencial de la caja conductora es φ_B. Determínese el potencial φ_A, si la extensión del resorte es x. En estado no extendido del resorte la distancia entre las



Para el problema 8.4.1.

placas y las paredes de la caja es l; el área de las placas $S \gg l^2$, x^2.

8.4.3. Determínese la diferencia de potencial entre los puntos A y B. ¿Con qué voltímetro es necesario medirla? ¿Qué cargas habrá en los condensadores al conectar un voltímetro electromagnético? ¿Por qué la calidad del voltímetro electromagnético queda determinada por su gran resistencia interna y la del voltímetro electroestático, por su pequeña capacidad?

8.4.4*. Hállese la cantidad de calor que se desprende en cada resistencia al cerrar el interruptor. Uno de los condensadores estaba cargado inicialmente hasta la tensión U y el segundo no tenía carga.

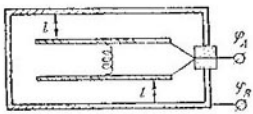
8.4.5. Hállese la cantidad de calor que se desprende en la resistencia, si al cambiar por turno las capacidades de los condensadores de C hasta $C/2$ se gasta un trabajo A. La carga inicial de cada condensador era q.

8.4.6. ¿Qué carga circulará por el galvanómetro después de cerrar el interruptor? ¿Qué cantidad de calor se desprenderá en la resistencia?

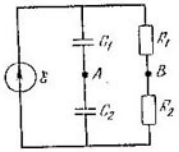
8.4.7. El diodo posee la característica tensión-corriente mostrada en la figura. A tensión U_0 el diodo se abre. Al comienzo, el condensador no estaba cargado. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá en la resistencia después de cerrar el interruptor?

8.4.8. Un acumulador se carga mediante cierto condensador con tensión inicial U. ¿Qué cantidad de energía química se acumulará en él después de cerrar el interruptor? ¿Qué cantidad de calor se desprenderá en este caso?

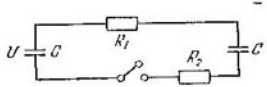
8.4.9*. Una pila con fem $\mathscr{E}$ consta de n elementos idénticos, unidos en serie. ¿De qué manera se debe cargar un condensador de capacidad C, para que las pérdidas constituyan la menor parte posible de la energía acumulada? ¿A qué será igual esa parte?



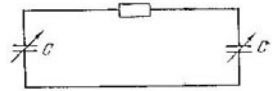
Para el problema 8.4.2.



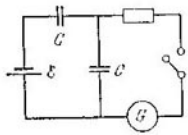
Para el problema 8.4.3.



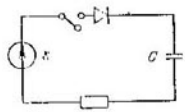
Para el problema 8.4.4*.

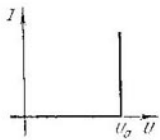


Para el problema 8.4.5.

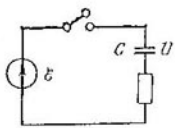


Para el problema 8.4.6.





Para el problema 8.4.7.



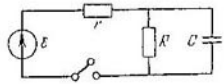
Para el problema 8.4.8.

Para el problema 8.4.10*.

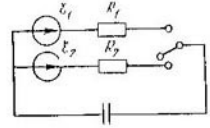
8.4.10*. C y q son la capacidad y carga iniciales de un condensador. La capacidad del condensador empiezan a cambiarla con el tiempo de manera que la corriente en el circuito permanezca constante e igual a I. Calcúlese la potencia consumida del generador y compárese con la potencia que absorbe el condensador. ¿Por qué las magnitudes a comparar se diferencian?

8.4.11. Por el circuito circula una corriente continua. El interruptor se abre. ¿Dentro de cuánto tiempo la carga en el condensador cambiará en 1/1000 de la magnitud inicial?

8.4.12*. El interruptor se conecta por turno a cada uno de los contactos en lapsos muy pequeños iguales. En el transcurso de cada conexión la variación de la carga del condensador es insignificante.



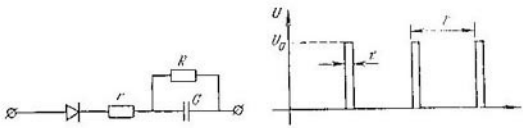
Para el problema 8.4.11.



Para el problema 8.4.12*.

¿Qué carga resultará en el condensador después de gran cantidad de conmutaciones? Determínese la carga del condensador en el caso en que el tiempo de conexión para el primer circuito es k veces menor que el tiempo de conexión para el segundo circuito.

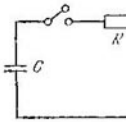
8.4.13*. Al circuito se suministran impulsos rectangulares periódicos de tensión U_0. La duración del impulso es τ y el período de repetición, T. Los impulsos se suministran a través de un diodo que puede considerarse como un interruptor ideal. Determínese la tensión que se establecerá en el condensador, si durante cada período la tensión en él cambia muy poco.



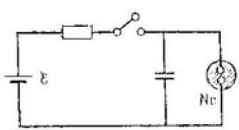
Para el problema 8.4.13*.

8.4.14*. Un condensador de capacidad C, cargado hasta la tensión U_0, después de conectar el interruptor se descarga a través de la resistencia R. ¿Cómo está ligada la velocidad de variación de la tensión dU/dt con la tensión en el condensador? ¿Cuál será la tensión en el condensador y la corriente en el circuito dentro del tiempo τ después de conectar el interruptor?

8.4.15. La conexión de una lámpara de neón se efectúa con ayuda del circuito mostrado en la figura. Después de conectar el interruptor, el condensador empieza a cargarse. Cuando la tensión en el condensador alcanza cierto valor U, la lámpara se enciende. La tensión



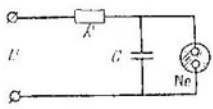
Para el problema 8.4.14*.



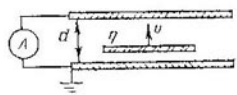
Para el problema 8.4.15.

mínima en la lámpara, con la que ésta sigue ardiendo es de 80 V; en este caso la corriente a través de ella es de 1 mA. La fem de la pila es de 120 V, $80\ \text{V} < U < 120\ \text{V}$. ¿En caso de qué resistencia la lámpara estará encendida permanentemente (no se apagará)?

8.4.16*. ¿Cómo depende la frecuencia del generador, representado en la figura, con relación a la tensión U? La lámpara de neón



Para el problema 8.4.16*.



Para el problema 8.4.17*.

se enciende a tensión U_1 y se apaga a tensión $U_0 < U_1$. Menospréciese la resistencia de la lámpara encendida.

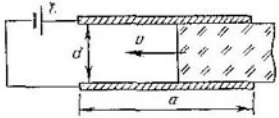
8.4.17*. a) Entre las placas del condensador se mueve a una velocidad constante v una lámina fina uniformemente cargada con carga q. Determínese la corriente en el circuito, si el condensador se cortocircuita y la distancia entre las armaduras es d.

b) ¿Cambiará el resultado, si entre las armaduras del condensador se mueve una partícula puntual cargada?

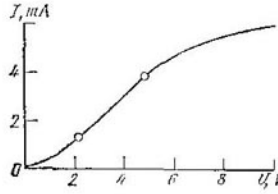
8.4.18. En un condensador plano con dimensiones de las placas $a \times b$ se introduce a velocidad constante v cierta lámina de grosor d, igual a la distancia entre las placas del condensador. ¿Qué corriente circula por el circuito? La fem de la pila es $\mathcal{E}$ y la constante dieléctrica de la substancia de la lámina es ε.

8.4.19. A tensiones positivas V en el diodo, la corriente que circula a través de éste $I = \alpha V^2$, mientras que a tensiones negativas, la corriente es nula. Hállese la corriente en el circuito, si dicho diodo se conecta a una pila con fem $\mathcal{E}$ mediante una resistencia R.

8.4.20*. Un diodo, con la característica tensión-corriente mostrada en la figura, se conecta a una pila con fem de 6 V mediante una



Para el problema 8.4.18.



Para el problema 8.4.20*.

resistencia de 1,5 kΩ. Determínese la corriente en el circuito. ¿Al conectar qué resistencias el diodo cesa de funcionar en la sección rectilínea de la característica?

Capítulo 9.

CAMPO MAGNÉTICO PERMANENTE

§ 9.1. Inducción del campo magnético. Influencia del campo magnético sobre la corriente

9.1.1. Una fuerza de 15 N actúa sobre cierto conductor lineal de 10 cm de longitud, al situarlo perpendicularmente al campo magnético, si la corriente en el conductor es igual a 1,5 A. Hállese la inducción del campo magnético.

9.1.2. Una fuerza de 10 N actúa sobre cierta carga de 1 C que se mueve a velocidad de 1 m/s en el campo magnético. La carga se mueve bajo un ángulo de 30° con relación al vector de la inducción del campo magnético. ¿Cuál es el módulo de dicho vector?

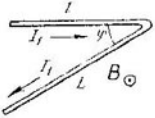
9.1.3. Sobre un conductor lineal de longitud l, situado perpendicularmente al campo magnético, actúa una fuerza F, si la corriente en el conductor es I. ¿Con qué fuerza el campo magnético actuará sobre:

a) un conductor de longitud $l + L$, curvado bajo el ángulo φ, si el plano de curvatura es perpendicular al campo magnético y la corriente en el conductor es igual a I[1];

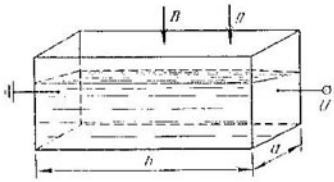
[1]) En las figuras el redondel con un punto en el centro significa que la inducción del campo magnético (o la corriente) está dirigida hacia nosotros y el redondel con una cruz, en dirección opuesta.

b*) una semicircunferencia de radio R a través de la cual circula una corriente I_2, si el plano de la circunferencia es perpendicular al campo magnético?

9.1.4*. En una cubeta rectangular, dos paredes opuestas de la cual son metálicas y las demás están hechas de aislador, se vierte hasta el nivel h cierto electrólito, cuya densidad es ρ y la conductividad, λ. A las paredes metálicas se les aplica una tensión U y toda la



Para el problema 9.1.3a.



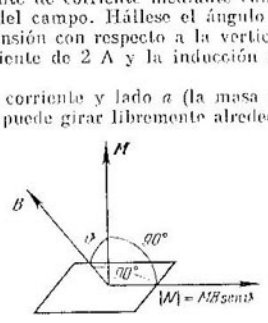
Para el problema 9.1.4*.

cubeta se coloca en un campo magnético vertical homogéneo de inducción B. Determínese la diferencia de los niveles del líquido cerca de las paredes delantera y posterior de la cubeta. La longitud de la cubeta es a y la anchura, b.

9.1.5. En un campo magnético homogéneo (las líneas de inducción son verticales) en dos hilos finos está colgado horizontalmente un conductor de masa de 0,16 kg y longitud de 80 cm. Los extremos del conductor se conectan a la fuente de corriente mediante cables flexibles que se encuentran fuera del campo. Hállese el ángulo en que se desviarán los hilos de suspensión con respecto a la vertical, si por el conductor fluye una corriente de 2 A y la inducción del campo magnético es de 1 T.

9.1.6. Un marco cuadrado con corriente y lado a (la masa del marco es m) se fija de manera que puede girar libremente alrededor

Para el problema 9.1.6.



Para el problema 9.1.7b.

del lado situado horizontalmente. El marco se ubica en un campo magnético homogéneo vertical de inducción B. El ángulo de incli-

nación del marco hacia el horizonte es α. Hállese la corriente en el marco.

9.1.7. a) En un campo magnético homogéneo se coloca un marco rectangular con corriente I. La inducción del campo magnético B es paralela al plano del marco. El área de este último es S. Demuéstrese que el momento de fuerzas que actúa sobre el marco es igual a $N = BM$, donde $M = IS$ es el momento magnético del cuadro.

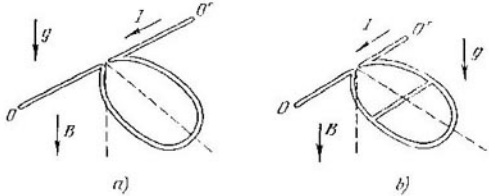
b) Demuéstrese que el momento de fuerzas que actúa sobre el marco en el problema a) en el caso en que B esté dirigido de la manera mostrada en la figura es igual a $N = [B \times M]$, donde M es el momento magnético del marco, cuyo módulo es igual a IS y la dirección es perpendicular al área S.

c*) Demuéstrese que el momento de fuerzas que actúa sobre cualquier marco plano con corriente en un campo magnético homogéneo de inducción B, es igual a $N = [B \times M]$.

Para el problema 9.1.8.

9.1.8. Un marco triangular de alambre con corriente I puede girar alrededor de un eje horizontal OO' que pasa por el vértice del triángulo. La masa de la unidad de longitud para el alambre es ρ. El marco se encuentra en los campos de gravedad y magnético de inducción B, dirigido a lo largo del campo de gravedad. Determínese el ángulo de desviación del plano del triángulo con relación a la vertical.

9.1.9. a) Un marco de alambre en forma de circunferencia con corriente I puede girar alrededor del eje horizontal OO'. La masa de



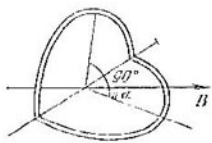
Para el problema 9.1.9.

la unidad del alambre es ρ. El marco se encuentra en los campos de gravedad y magnético de inducción B, dirigido a lo largo del campo de gravedad. Determínese el ángulo de desviación del plano de la circunferencia con respecto a la vertical.

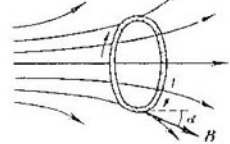
b*) Un marco de alambre en forma de una circunferencia tiene en el diámetro un puente de unión del mismo alambre, paralelo al

eje horizontal OO', alrededor del que puede girar el cuadro. La masa de la unidad de longitud del marco y del puente es la misma e igual a ρ. La corriente que entra en el cuadro es igual a I. El cuadro se encuentra en el campo de gravedad y en el magnético de inducción B, dirigido paralelamente al campo de gravedad. ¿A qué ángulo con respecto a la vertical se desviará el marco?

9.1.10. Una espira de radio R se dobla por el diámetro bajo un ángulo recto y se coloca en un campo magnético homogéneo de inducción B de manera que uno de los planos de la espira resulta situado



Para el problema 9.1.10.



Para el problema 9.1.11.

bajo el ángulo α y el otro, bajo el ángulo $\pi/2 - \alpha$ con relación al sentido de la inducción B. La corriente en la espira es I. Determínese el momento de fuerzas que actúa sobre la espira.

9.1.11. Un anillo de radio R, por el que circula cierta corriente I, se ubica en un campo axisimétrico heterogéneo. El eje del anillo coincide con el eje de simetría del campo magnético. La inducción del campo magnético B, que influye sobre la corriente, está dirigida bajo un ángulo α hacia el eje de simetría del campo. La masa del anillo es m. Determínese la aceleración del anillo.

9.1.12*. Un anillo conductor se coloca en un campo magnético, perpendicular al plano de aquél. Por el anillo circula cierta corriente I. Se sabe que el alambre del anillo puede soportar una carga F antes de romperse, ¿qué inducción B habrá que crear para que el anillo se rompa? El radio del anillo es R. Menospréciese la influencia del campo magnético de la corriente I sobre el anillo.

§ 9.2. Campo magnético de una carga en movimiento. Inducción del campo magnético de la corriente lineal[1])

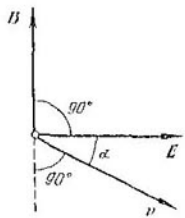
9.2.1. Un campo eléctrico de intensidad E que se mueve a velocidad v[2]), crea cierto campo magnético, cuya inducción $B = K [v \times E]$ ($|B| = KvE \operatorname{sen} \alpha$). El coeficiente K es igual a $\mu_0\varepsilon_0$ en SI y $1/c$ en CGS, donde c es la velocidad de la luz. Haciendo uso de esta propiedad del campo eléctrico en movimiento, demuéstrese

[1]) Si en el problema no se indica el valor de la permeabilidad magnética del medio, considérese ésta igual a la unidad.

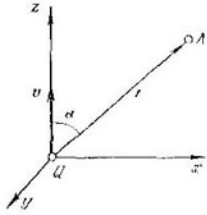
[2]) Si en el problema no se indica especialmente, considérese que $v \ll c$.

que la interacción magnética de dos cargas en movimiento es más débil que su interacción eléctrica.

9.2.2. Haciendo uso de la fórmula obtenida en el problema anterior, determínese en el punto A la inducción del campo magnético originado por la carga Q que se mueve a la velocidad v.

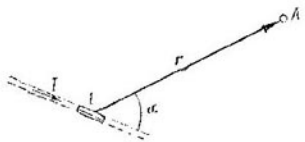


Para el problema 9.2.1.



Para el problema 9.2.2.

9.2.3. Determínese la inducción del campo magnético del elemento de corriente de longitud l, por el que fluye una corriente I, en el punto A a una distancia $r \gg l$ de dicho elemento. El radio vector r forma un ángulo α con el elemento de corriente.



Para el problema 9.2.3.

9.2.4. a) Hállese la distribución de la inducción del campo magnético alrededor de un hilo infinito, cargado con densidad lineal ρ, para el caso en que el hilo se mueve en sentido longitudinal a velocidad v.

b) Determínese la distribución de la inducción del campo magnético alrededor de un conductor recto infinito por el que fluye una corriente I.

9.2.5. a) Una fuerza de $2 \cdot 10^{-7}$ N actúa sobre cada metro de un conductor largo recto por parte de un conductor idéntico paralelo. La distancia entre los conductores es de 1 m. Las corrientes que circulan en los conductores son las mismas. ¿Qué corriente fluye por los conductores?

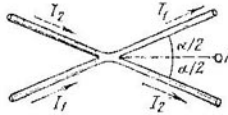
b) Un conductor con corriente de 1 A ejerce una fuerza de $2{,}5 \times 10^{-7}$ N sobre cada metro del segundo conductor largo y recto con

la misma corriente. Los conductores distan 1 m uno del otro, permaneciendo en un medio magnético. ¿Qué permeabilidad magnética tiene dicho medio?

9.2.6. Por cuatro conductores paralelos rectos y largos que atraviesan los vértices de un cuadrado (el lado del cuadrado es de 30 cm) perpendicularmente a su plano, circulan las mismas corrientes de 10 A, con la particularidad de que por tres conductores las corrientes fluyen en una dirección y por el cuarto, en sentido opuesto. Determínese la inducción del campo magnético en el centro del cuadrado.

9.2.7. Hállese la inducción del campo magnético en el punto A a una distancia l del punto de intersección de dos conductores rectos con corrientes I_1 e I_2.

9.2.8. Tres conductores rectos con corrientes I, $I/4$ y $3I/4$ yacen en un plano y se unen en el punto O. Hállese la inducción del campo

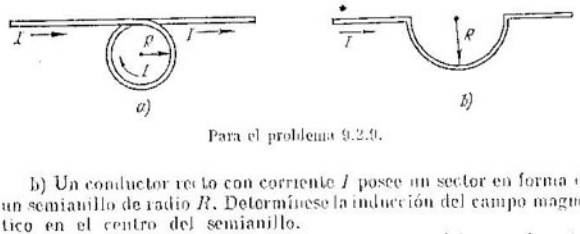


Para el problema 9.2.7.

Para el problema 9.2.8.

magnético en la recta que pasa por el punto O perpendicularmente a los tres conductores.

9.2.9. a) Un conductor recto con corriente I posee cierta espira de radio R. Determínese la inducción del campo magnético en el centro de la espira y en su eje a la distancia h del centro de la espira.



Para el problema 9.2.9.

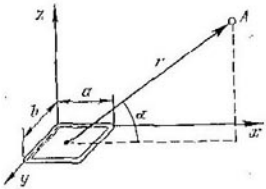
b) Un conductor recto con corriente I posee un sector en forma de un semianillo de radio R. Determínese la inducción del campo magnético en el centro del semianillo.

9.2.10*. ¿Cuál es la inducción del campo magnético en el centro de un marco cuadrado por el que circula la corriente I? La longitud del lado del cuadro es a.

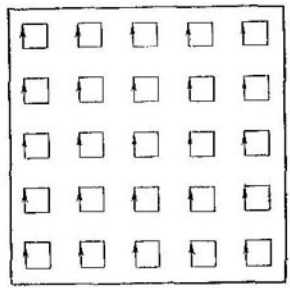
9.2.11*. a) Determínese la magnitud de la inducción para el campo magnético en un marco rectangular $a \times b$ con corriente I en el punto A que dista $r \ll a, b$. El radio vector r forma el ángulo α con el plano del cuadro.

b) A grandes distancias el campo magnético de un contorno plano con corriente se determina por el momento magnético del contorno y no depende de su forma. Demuéstrese eso.

9.2.12*. a) Dentro de un cuadrado grande están distribuidos uniformemente muchos microcuadrados con corrientes de contorno. El momento magnético de cada microcircuito (microcontorno) es M_0. Demuéstrese que a distancias, mucho mayores que la distancia



Para el problema 9.2.11*a.



Para el problema 9.2.12*a.

entre los microcircuitos, la inducción del campo magnético de dichos microcircuitos coincide con la inducción del campo magnético del cuadrado grande con el momento NM_0, donde N es la cantidad de microcircuitos dentro del cuadrado grande.

b) Una lámina cuadrada fina $a \times a \times h$ ($h \ll a$) está imanada en dirección transversal. La inducción del campo magnético en el centro de la lámina es B. Determínese el momento magnético de la unidad de volumen para la substancia de la lámina.

9.2.13. Un disco fino de radio R y grosor h se corta de un trozo de hierro imanado. El plano del disco es perpendicular a la dirección de la imanación. El momento magnético de la unidad de volumen del hierro es M. Determínese la inducción del campo magnético en el eje del disco a la distancia l con respecto a su centro.

9.2.14. a) Un anillo metálico se rompió cuando la corriente en el anillo era I. Se ha hecho un nuevo anillo semejante al anterior, pero de un material, cuyo límite a la rotura es 10 veces mayor. ¿Qué corriente romperá este nuevo anillo?

b*) ¿Qué corriente romperá el nuevo anillo, hecho del mencionado material con elevada resistencia mecánica, si todas las dimensiones del anillo nuevo son 2 veces mayores que las dimensiones del viejo?

§ 9.3. Campo magnético de una corriente, distribuida por un plano o volumen

9.3.1. Haciendo uso de la fórmula expuesta en el problema 9.2.1, determínese la inducción del campo magnético en las proximidades de una lámina cargada uniformemente que se mueve a la velocidad v a lo largo de su plano. La densidad superficial de la carga de la lámina es σ.

9.3.2. Hállese la inducción del campo magnético dentro de un condensador plano que se mueve a velocidad de 9 m/s paralelamente a sus armaduras. La distancia entre las armaduras es de 10 mm y la tensión, de 10 kV.

9.3.3. ¿Cuál es la inducción del campo magnético:

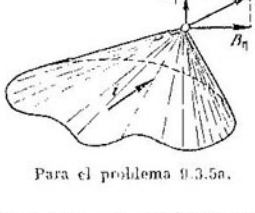
a) de un plano infinito por el que pasa una corriente con densidad lineal i;

b) entre dos planos infinitos paralelos por los que fluyen en una dirección las corrientes con densidades lineales i y $2i$, i e i, $3i$ y $4i$; fuera de estos planos;

c) fuera de dos planos paralelos, por los que circulan en sentidos opuestos las corrientes con densidades superficiales i y $2i$, i e i, $3i$ y $4i$; entre estos planos?

9.3.4. a) Por dos barras paralelas fluyen las mismas corrientes I. La anchura de las barras b es mucho mayor que la distancia entre las mismas. ¿Cuál será la fuerza que actúa sobre la unidad de longitud de la barra?

b*) A través de una placa de sección rectangular $a \times b$ ($a \ll b$) se deja pasar cierta corriente I. El módulo de elasticidad longitudinal de la placa es E. Determínese en qué magnitud disminuirá la dimensión a bajo la acción de las fuerzas magnéticas.



Para el problema 9.3.5a.

c) El cobre blando «fluye» a presión de unos $4 \cdot 10^7$ Pa, y el acero, a presión de $5 \cdot 10^8$ Pa. Estímense las inducciones mínimas de los campos magnéticos, bajo la influencia de las cuales van a fluir el cobre y el acero en las condiciones del problema b*).

9.3.5. a) Por un sector de la superficie plana mostrada en la figura pasa una corriente con densidad lineal i. Demuéstrese que la componente del vector de la inducción del campo magnético, paralela a la superficie y perpendicular a i, se determina por la fórmula $B_{\parallel} = \mu_0 i\Omega/4\pi$, donde Ω es el ángulo sólido, bajo el cual se ve la superficie.

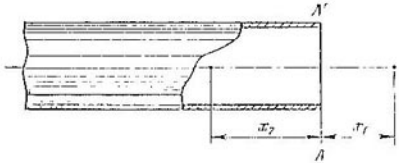
b) ¿Cuál será la inducción del campo magnético de una banda infinitamente larga con anchura $2h$ sobre la línea central de la banda

a la distancia h de la línea, si a lo largo de la banda circula una corriente con densidad lineal i?

9.3.6*. a) ¿Cuál será la inducción del campo magnético dentro de un cilindro infinitamente largo, por cuya superficie circula una corriente transversal con densidad lineal i? ¿Depende este resultado de la forma de la sección transversal de la superficie cilíndrica?

b) ¿Qué tensión origina en las espiras de un solenoide largo la corriente I? La cantidad de espiras por unidad de longitud del solenoide es n y su radio, R.

9.3.7*. Por la superficie de un cilindro circular semiinfinito fluye una corriente transversal con densidad lineal i.



Para el problema 9.3.7*.

a) Determínese la componente del vector de inducción del campo magnético a lo largo del eje en el extremo del cilindro AA'.

b) ¿Cómo depende la inducción del campo magnético en el eje del cilindro con respecto a las distancias x_1 y x_2 hasta su extremo? ¿Cuál será esta inducción a mayores distancias? El radio del cilindro es R.

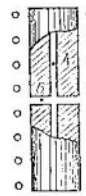
9.3.8.*. a) Un cilindro enterizo se corta de un pedazo de hierro imanado hasta la saturación de manera que el eje del cilindro coincide con la dirección de la imanación. Demuéstrese la equivalencia del campo para ese cilindro al campo de la corriente transversal que fluye por su superficie con la densidad lineal que es igual al momento magnético de la unidad de volumen del hierro.

b) De una barra larga, imanada hasta la saturación a lo largo del eje, se corta un cubo pequeño de manera que una de las aristas del cubo esté dirigida a lo largo del sentido de la imanación. ¿En cuántas veces la inducción del campo magnético en el centro del cubo será menor que la inducción en la barra?

c) Unas láminas cuadradas finas $a \times a \times h$ ($h \ll a$) se imanan hasta la saturación en sentido transversal. En el centro de las láminas la inducción del campo magnético es B_0. ¿Cuál será la inducción del campo dentro de una columna rectangular larga con sección $a \times a$, armada de dichas láminas?

9.3.9. En un solenoide largo con una corriente de 0,5 A se coloca una pequeña columna cilíndrica hecha de un material ferromagnético con cavidades estrechas. La cantidad de espiras por unidad

de longitud del solenoide es 10 y la permeabilidad magnética del material ferromagnético es 600. Determínese la inducción del campo magnético en las cavidades transversal y longitudinal (en los puntos A y B).



Para el problema 9.3.9.

9.3.10. Un disco de radio R y altura $h \ll R$, hecho de un material con permeabilidad magnética $\mu = 1 + \varkappa$ ($\varkappa \ll 1$), se coloca transversalmente en un campo magnético homogéneo con inducción B_0. ¿En cuánto la inducción en el centro del disco se diferenciará de B_0?

9.3.11. La circulación del vector de inducción para un campo magnético permanente por un contorno cerrado (el «trabajo» del vector de inducción del campo magnético por el contorno) en el vacío es siempre igual a la corriente a través de la superficie, limitada por este contorno, multiplicada por μ_0. Adúzcanse ejemplos que confirmen esa ley. Haciendo uso de ésta, resuélvanse los siguientes problemas:

a) Por un conductor recto ilimitadamente largo de radio r circula una corriente I. La corriente está distribuida uniformemente

Para el problema 9.3.11b.

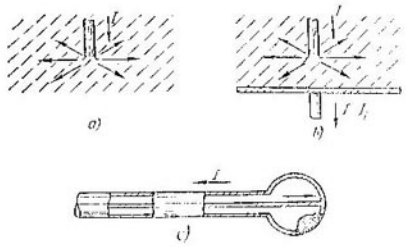
por la sección del conductor. Hállese la inducción del campo magnético dentro y fuera del conductor.

b) Por un barra ancha y larga con dimensión transversal a fluye una corriente, distribuida uniformemente por la sección del conductor. La densidad de la corriente es j. ¿Cómo depende la inducción del campo magnético con respecto a la distancia x hasta el plano central de la barra?

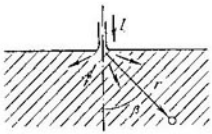
c) Una corriente I circula por un solenoide toroidal con N espiras. El radio exterior del toro es R y el interior, r. Determínense las inducciones máxima y mínima del campo magnético dentro del solenoide.

9.3.12. a) La corriente I circula por un conductor recto y largo, perpendicular al plano conductor, y se extiende por éste. Determínese la distribución de la inducción del campo magnético.

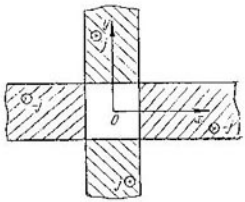
b) Un conductor largo con corriente I corta perpendicularmente cierto plano conductor. La corriente que pasa al plano es I_1. De-



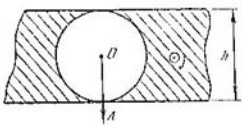
Para el problema 9.3.12.



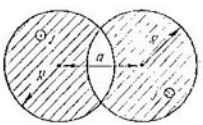
Para el problema 9.3.13*.



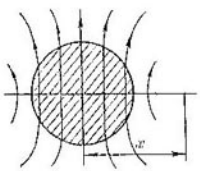
Para el problema 9.3.14.



Para el problema 9.3.15.



Para el problema 9.3.17*a.



Para el problema 9.3.18*.

termínese la distribución de la inducción del campo magnético para dicho sistema de corrientes.

c) Un cable coaxial entra en una cavidad esférica de la manera mostrada en la figura. Hállese la inducción del campo magnético en todo el espacio.

9.3.13*. La corriente I por un cable recto y largo entra en un conductor perpendicularmente a su superficie y se extiende uniformemente por ella. ¿Cómo depende la inducción del campo magnético dentro del conductor con relación al ángulo β y a la distancia r?

9.3.14. La distribución de la corriente en dos placas mutuamente perpendiculares de grosor h se da en la figura. En la zona de intersección de las placas no hay corriente. Trácese la gráfica de la dependencia entre la inducción del campo magnético y x.

9.3.15. En una placa ilimitada de grosor h se corta una cavidad cilíndrica de radio $h/2$, cuyo eje es paralelo a las superficies de la placa. Por todo el volumen de la placa, a excepción de la cavidad, fluye una corriente, dirigida a lo largo del eje de la cavidad. Hállese la distribución de la inducción del campo magnético a lo largo de la recta OA que atraviesa el eje de la cavidad y es perpendicular a las superficies de la placa. La densidad de la corriente es j.

9.3.16*. Determínese la inducción del campo magnético en una cavidad cilíndrica larga dentro de un conductor cilíndrico, si el eje de la cavidad es paralelo al eje del conductor y dista d de éste. La corriente está distribuida uniformemente por la sección del conductor. La densidad de la corriente es j.

9.3.17*. a) Las zonas rayadas se forman por las superficies de dos cilindros de radio R, cuyos centros distan a el uno del otro. Dos corrientes con densidad j atraviesan estas zonas a lo largo de los ejes en sentidos opuestos. Hállese la inducción del campo magnético en la zona, yacente entre las regiones rayadas.

b) Haciendo uso del resultado del problema a) y aplicando el método de transición límite $a \to 0$, $j \to \infty$, hállese la distribución de la densidad lineal de la corriente en la superficie del cilindro de radio R, que crea dentro del cilindro un campo magnético homogéneo de inducción B_0. ¿De qué modo está relacionada la densidad lineal máxima de la corriente con la inducción del campo B_0?

9.3.18*. Una barra cilíndrica larga de hierro con radio r se imana en un campo magnético, perpendicular al eje de la barra. El momento magnético de la unidad de volumen de la barra es M. ¿Cómo depende la inducción del campo magnético de x a distancias mucho menores de la longitud de la barra?

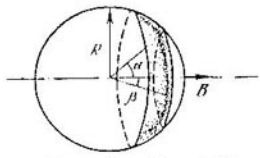
§ 9.4. Flujo magnético

9.4.1. a) La inducción de un campo magnético homogéneo es B. ¿Cuál es el flujo magnético a través de un cuadrado con lado a, cuyo plano se encuentra bajo un ángulo de 60° hacia la dirección del campo magnético?

b) ¿Cuál es el flujo magnético a través de una superficie plana de área S que se sitúa bajo el ángulo α con relación al sentido del campo magnético?

9.4.2. Determínese el flujo magnético que atraviesa el sector destacado en la figura de una esfera con radio R. La inducción del

Para el problema 9.4.1a.



Para el problema 9.4.2.

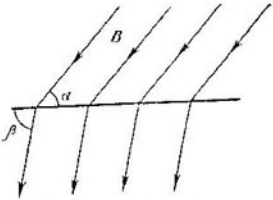
campo magnético está dirigida a lo largo del eje de simetría de dicho sector.

9.4.3. Muéstrese que el flujo magnético de un plano con densidad lineal de la corriente i a través de cualquier superficie cerrada es nulo.

9.4.4*. Demuéstrese que el flujo magnético de un elemento de corriente a través de cualquier superficie cerrada es nulo.

9.4.5. Una frontera horizontal plana divide el espacio en dos partes. En la inferior la inducción del campo magnético es nula. Demuéstrese que el campo magnético homogéneo en la cercanía de la superficie en la parte superior está dirigido paralelamente a la superficie.

9.4.6. El vector de inducción del campo magnético B, al pasar por una superficie plana, cambia el ángulo de inclinación hacia la superficie de α a β. ¿En cuánto cambiará la inducción del campo? ¿Cuál será la densidad lineal de la corriente en la superficie?



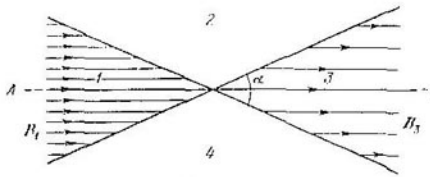
Para el problema 9.4.6.

9.4.7*. Dos planos, que se cortan bajo el ángulo α, dividen el espacio en cuatro zonas. El campo magnético en cada zona es homogéneo. En las zonas *1* y *3* los campos son paralelos al plano de simetría AA' y están dirigidos hacia una misma parte. Las inducciones de estos campos son B_1 y B_2. Determínense las inducciones de los campos en las zonas *2* y *4*.

9.4.8. a) La componente de inducción para un campo magnético axisimétrico a lo largo del eje de simetría depende linealmente de x: $B_x = B_0 x/x_0$, donde x_0 y B_0 son constantes. Determínese la dependencia entre la componente radial de la inducción del campo

y la distancia hasta el eje. ¿Cómo depende el ángulo de inclinación del campo con respecto a x y r? Trácense las líneas de fuerza para este campo.

b) La componente de inducción para el campo magnético en el problema a) cambia a lo largo del eje como $B_0\,(x/x_0)^n$. Determínese



Para el problema 9.4.7*.

la componente radial de la inducción del campo. ¿Cómo puede determinarse B_r para el caso general cuando $B_x = B_0 f(x)$?

9.4.9. La componente de la inducción para el campo magnético a lo largo del eje OO' de un cilindro ilimitado con radio R cambia como $B_0 x/x_0$. Fuera del cilindro dicha componente es nula. ¿De qué manera depende la componente radial del campo fuera del cilindro con relación a la distancia hasta el eje OO'?

Para el problema 9.4.8.

9.4.10*. a) Determínese el flujo magnético a través de la superficie de un cilindro semiinfinito por el que circula una corriente transversal con densidad lineal i. El radio del cilindro es R.

b) ¿Con qué fuerza se atraen las dos mitades de un solenoide largo con corriente I? El radio del solenoide es R y la cantidad de espiras en unidad de longitud del solenoide, n.

c) Dos barras largas, imanadas, en dirección longitudinal, se atraen una a otra por sus extremos. Para separarlas es necesario aplicar en sentido axial la fuerza F. La sección de las barras es la misma y el área de la sección S. Determínese la inducción del campo magnético en el lugar de unión de las barras.

d) En un campo magnético heterogéneo se encuentra cierto solenoide con corriente I. La cantidad de espiras por unidad de longitud del solenoide es n. Los flujos magnéticos que entran y salen por los extremos del solenoide, son iguales a Φ_1 y Φ_2. Determínese la fuerza que actúa sobre el solenoide a lo largo de su eje.

9.4.11. Se llama inductancia mutua de dos circuitos al factor de proporcionalidad entre la corriente en uno de los circuitos y el

flujo magnético creado por ella, que atraviesa el segundo circuito. Determínese la inductancia mutua: a) de dos contornos circulares con radios r y R, situados en un mismo eje de simetría distando $l \gg r$, R; b) de un solenoide largo de radio r con n espiras por unidad de longitud y un contorno coaxial circular que abarca dicho solenoide.

Capítulo 10

MOVIMIENTO DE LAS PARTICULAS CARGADAS EN CAMPOS COMPLEJOS

§ 10.1. Movimiento en los campos magnético y eléctrico

10.1.1. Un protón, acelerado mediante una tensión de $2 \cdot 10^4$ V, irrumpe en un campo magnético homogéneo con inducción de 0,1 T perpendicularmente a las líneas de fuerza. Hállese el radio de la circunferencia, por la que se mueve el protón en el campo magnético.

10.1.2. Un electrón, acelerado mediante una tensión de 200 V, se mueve en el campo magnético de la Tierra con inducción $0{,}7 \cdot 10^{-4}$ T. Hállese el radio de la circunferencia por la que se mueve el electrón, si su velocidad es perpendicular al campo magnético de la Tierra.

10.1.3. Dos electrones con energías cinéticas K_1 y K_2 se mueven en un campo magnético, perpendicular a sus velocidades. Hállense la relación de sus períodos de rotación y la razón de los radios de las trayectorias.

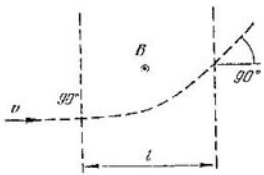
10.1.4. Determínese la frecuencia de rotación (la frecuencia de ciclotrón) para una partícula de masa m con carga q en un campo magnético de inducción B.

10.1.5. ¿Dentro de cuánto tiempo después del primer encuentro tendrá lugar el segundo de dos partículas cargadas que se mueven perpendicularmente al campo magnético de inducción B? Durante el primer encuentro las partículas se movían de manera mutuamente perpendicular. La carga de las partículas es q y la masa, m. Menospréciese la interacción de las partículas.

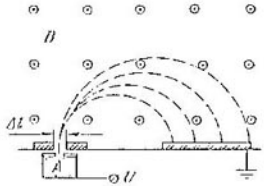
10.1.6. Con ayuda de la cámara de Wilson (cámara de niebla), instalada en un campo magnético de inducción B, se puede observar la difusión elástica de las partículas α en los núcleos de deuterio. Hállese la energía inicial de la partícula α, si los radios de curvatura en los tramos iniciales de las trayectorias del núcleo y de la partícula α después de la difusión resultaron ser los mismos e iguales a R. Las dos trayectorias yacen en el plano, perpendicular a la inducción del campo magnético.

10.1.7. El electrón irrumpe en una capa del campo magnético de grosor l. La velocidad del electrón v es perpendicular tanto a la inducción del campo B, como a las superficies de separación de la capa. ¿Bajo qué ángulo el electrón saldrá del campo magnético?

10.1.8. En la figura se muestra uno de los espectrómetros de masa más sencillos, la inducción del campo magnético en el cual



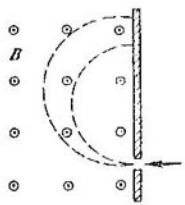
Para el problema 10.1.7.



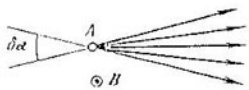
Para el problema 10.1.8.

es de 0,1 T. En el ionizador A se forman iones que se aceleran mediante una tensión de 10 kV. Después de girar en el campo magnético, los iones van a parar a una placa fotográfica y provocan su ennegrecimiento. ¿A qué distancia con respecto a la rendija se encontrarán en la placa fotográfica las bandas de los iones H_1^+, H_2^+, H_3^+, H_4^+? ¿Qué anchura deberá tener la rendija para que las bandas de los iones O_{16}^+ y N_{15}^+ resulten separadas?

10.1.9. En un dispositivo para determinar la composición isotópica los iones de potasio $^{39}K^+$ y $^{41}K^+$ primero se aceleran en un cam-



Para el problema 10.1.9.



Para el problema 10.1.10*.

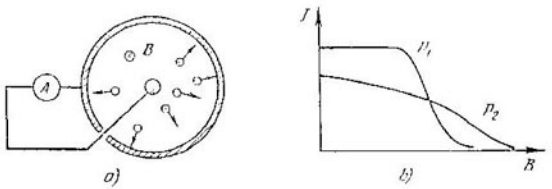
po eléctrico, y luego van a parar a un campo magnético homogéneo de inducción B, dispuesto perpendicularmente a la dirección de su movimiento. En el transcurso del experimento a causa de la imperfección del aparato la tensión acelerante varía alrededor del valor medio U_0 en la magnitud $\pm\Delta U$. ¿Con qué precisión relativa $\Delta U/U_0$ es necesario mantener el valor de la tensión acelerante para que los haces de isótopos de potasio no se superpongan?

10.1.10*. Del punto A irrumpen partículas a velocidad v, teniendo una dispersión angular pequeña $\delta\alpha$, y a continuación se desplazan en un campo magnético homogéneo de inducción B de modo perpendicular a éste. Determínese a qué distancia del punto A se reunirá el haz y estímese en este lugar su dimensión transversal. La masa de las partículas es m y la carga, q.

10.1.11. En un campo magnético homogéneo de inducción B irrumpe bajo el ángulo α hacia el campo cierta partícula de masa m y carga q que posee la velocidad v. Hállese el radio y el paso de la espiral por la que se mueve la partícula.

10.1.12*. A lo largo de un campo magnético homogéneo de inducción B de un punto irrumpen electrones a velocidad v, teniendo una dispersión angular pequeña $\delta\alpha$. Determínese a qué distancia del lugar de partida el haz posee la dimensión transversal mínima y estímese esta magnitud.

10.1.13. a) El dispositivo consta de un cilindro con radio R y de un alambre coaxiales, que se introducen en un campo magnético



Para el problema 10.1.13.

longitudinal de inducción B. Al calentar el alambre, de éste parten electrones con energía cinética K. En este caso en el circuito exterior entre el cilindro y el alambre comienza a circular una corriente. Trácese la dependencia entre I y B para el dispositivo en el que se crea el vacío. Hállense los valores de B para los que la corriente en el vacío sea nula.

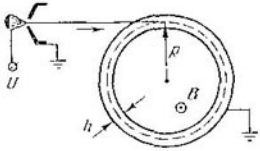
b) En la figura vienen expuestas dos dependencias entre I y B para diferentes presiones de los gases restantes P_1 y P_2. ¿Cuál de las presiones es mayor?

10.1.14. Dos electrones se mueven a velocidades v, iguales según el módulo, en un campo magnético homogéneo de inducción B. En cierto instante la distancia entre ellos es $2R$ y los vectores velocidades son mutuamente antiparalelos y perpendiculares a B. ¿Para qué valores de B la distancia entre los electrones permanecerá invariable? ¿Es estable el sistema?

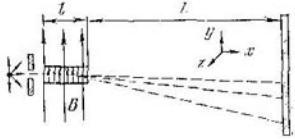
10.1.15. Un electrón gira describiendo una órbita de radio R alrededor de cierto protón. ¿Cómo cambiará la frecuencia de rotación del electrón por la misma órbita, si el sistema se coloca en un

campo magnético débil de inducción B, dirigido a lo largo del eje de rotación?

10.1.16. ¿Qué tensión es necesario aplicar entre las armaduras de un condensador cilíndrico para que éste «capture en la órbita» a los electrones que han superado la diferencia de potencial acelerante U? El condensador se encuentra en un campo magnético homogéneo



Para el problema 10.1.16.



Para el problema 10.1.17.

de inducción B, dirigido a lo largo del eje del condensador. La distancia entre las armaduras del condensador h es mucho menor que el radio medio R del condensador.

10.1.17. a) En un condensador plano de longitud l la intensidad del campo eléctrico es igual a E y la inducción del campo magnético, dirigido a lo largo de E, es igual a B. En la entrada del condensador hay una fuente radiactiva que emite electrones con diferentes velocidades. De ellos se compone un haz fino que atraviesa el condensador y luego va a parar a una placa fotográfica, situada a la distancia $L \gg l$. ¿Qué curva «trazarán» los electrones en la placa fotográfica, si sus desviaciones son pequeñas?

b) Hállese la curva en la placa fotográfica para $B = 1$ T, $E = 50 \cdot 10^6$ V/m, $l = 5$ cm y $L = 50$ cm.

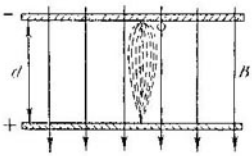
c) A velocidades grandes la masa del electrón cambia notoriamente. Conforme a la fórmula de Lorentz $m = m_e/\sqrt{1 - \beta^2}$, donde β es la relación entre las velocidades del electrón y de la luz; m_e, la masa en reposo del electrón. Resuélvase el problema a) teniendo en cuenta el efecto de variación de la masa del electrón.

10.1.18. La tensión acelerante en los electrodos en D (semicirculares) de un ciclotrón es U. La inducción del campo magnético en el acelerador es B y su radio, R. Determínese el tiempo de aceleración del protón que entra al centro del acelerador con energía cinética K. Menospréciese el tiempo de movimiento del protón entre los electrodos semicirculares.

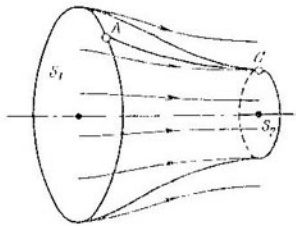
10.1.19. Las placas de un condensador plano con espacio d están situadas perpendicularmente al campo magnético de inducción B. En las proximidades del cátodo se encuentra una fuente de electrones lentos que irrumpen en diferentes direcciones hacia las placas. ¿Al mantener qué tensión en el condensador los electrones se reunirán en el ánodo? ¿Qué es lo que determina el tamaño de la mancha?

10.1.20. Determínese qué velocidad máxima desarrollará un cuerpo con carga que se desplaza por un plano inclinado en un campo magnético de inducción B y en el campo de gravedad. La masa y la carga del cuerpo son m y q. El campo magnético es paralelo al plano inclinado y perpendicular al campo de gravedad. El ángulo de inclinación hacia el horizonte es α.

10.1.21*. a) Demuéstrese que la variación total del momento de impulso del electrón, al moverse desde el punto A hacia el punto



Para el problema 10.1.19



Para el problema 10.1.21* a.

C en un campo magnético axisimétrico, es igual a la diferencia de los flujos magnéticos, a través de las secciones circulares S_1 y S_2, multiplicada por $e/2\pi$.

b) Determínese el radio mínimo que puede poseer un haz de electrones al pasar del campo con inducción B_1 al campo con inducción B_2. Los ejes de simetría del campo transitorio y del haz coinciden. En la zona del primer campo la velocidad de los electrones es paralela al vector B_1 y el radio del haz es R.

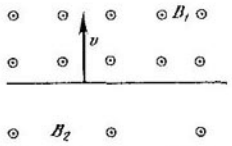
§ 10.2. Movimiento a la deriva de las partículas

10.2.1. El espacio está dividido en dos mitades mediante un plano. En la mitad superior se crea un campo magnético de inducción B_1, y en la inferior, de inducción B_2, con la particularidad de que los campos son homogéneos y paralelos uno a otro. Un electrón sale a la velocidad v del plano de separación perpendicular a éste hacia la mitad superior. Describase el movimiento posterior del electrón. Determínese la velocidad de deriva del electrón a lo largo de la superficie de separación de los campos magnéticos.

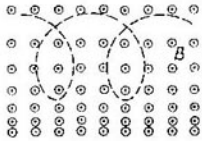
10.2.2*. Estímese la velocidad de deriva de un electrón a través de un campo magnético heterogéneo, cuyas componentes de inducción son: $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = B_0 (1 + \alpha x)$. La velocidad del electrón es v, $v \ll eB_0/(\alpha m_e)$.

10.2.3. Las zonas de los campos eléctrico y magnético están divididas por una superficie de separación imaginaria: un plano. En

la zona superior se encuentra un campo magnético homogéneo de inducción B paralelo al plano de separación. En la zona inferior está el campo eléctrico homogéneo de intensidad E perpendicular al plano de separación. En el campo eléctrico distando l de la superficie de separación se ubica una partícula con masa m y carga q.



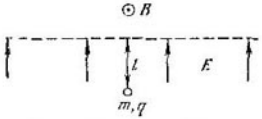
Para el problema 10.2.1.



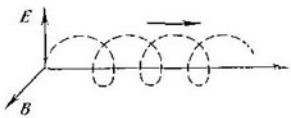
Para el problema 10.2.2.

Trácese la trayectoria de la partícula. Hállese la velocidad de deriva de la partícula a lo largo de la superficie de separación de los campos.

10.2.4. Los campos eléctrico y magnético mutuamente perpendiculares se llaman campos cruzados. ¿Qué velocidad inicial debe tener una partícula cargada en la dirección perpendicular a estos



Para el problema 10.2.3.



Para el problema 10.2.5.

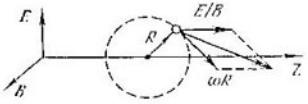
campos para que su movimiento en los campos cruzados siga siendo rectilíneo? La intensidad del campo eléctrico es E y la inducción del campo magnético, B.

10.2.5. En los campos eléctrico y magnético cruzados una partícula «está en deriva» a través de los campos. ¿Qué velocidad de deriva tendrá la partícula?

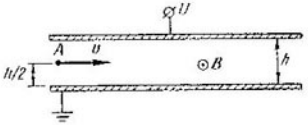
10.2.6. ¿Qué velocidad de deriva tendrá una partícula cargada que se encuentra transversalmente a los campos eléctrico y magnético, si el ángulo entre E y B es igual a α?

10.2.7. Demuéstrese que una partícula cargada en los campos eléctrico y magnético cruzados gira con la frecuencia $\omega = qB/m$ alrededor del centro que se mueve a la velocidad de deriva (y por eso la velocidad de la partícula en cualquier instante es igual a la suma vectorial de la velocidad de rotación alrededor del centro instantáneo y la velocidad de deriva).

10.2.8. Un condensador plano se coloca en un campo magnético homogéneo de inducción B paralelo a las placas. Del punto A irrumpen electrones, perpendicularmente a la dirección del campo magné-



Para el problema 10.2.7.

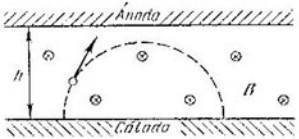


Para el problema 10.2.8.

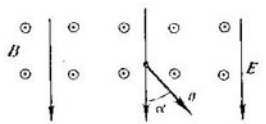
tico. La tensión, aplicada a las placas, es U. ¿Bajo qué condición los electrones atravesarán el condensador?

10.2.9. Entre el ánodo y cátodo planos se suministra alta tensión. El sistema se encuentra en un campo magnético de inducción B que es paralelo a los electrodos. Determínese al aplicar qué tensiones los electrones alcanzarán el ánodo. Hállese la tensión, si $B = 0{,}1$ T y $h = 2$ cm.

10.2.10. Un electrón gira en un campo magnético permanente de inducción B teniendo la velocidad v. Se conecta el campo eléctrico



Para el problema 10.2.9.



Para el problema 10.2.10.

de intensidad E, dirigido bajo el ángulo α hacia el vector velocidad del electrón. Determínese el movimiento posterior del electrón.

10.2.11. Hállese la velocidad de deriva para una partícula en los campos mutuamente perpendiculares magnético de inducción B y de la fuerza constante F. La carga de la partícula es q.

10.2.12. Hállense las velocidades de deriva para el electrón y protón en el campo de gravedad y en el campo magnético de la Tierra, cuya inducción es igual a $0{,}7 \cdot 10^{-4}$ T. El campo magnético es perpendicular al campo de gravedad.

Capítulo 11.

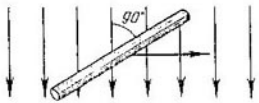
INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

§ 11.1. Movimiento de los conductores en un campo magnético permanente. Motores eléctricos

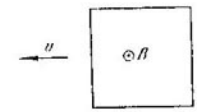
11.1.1. ¿Entre qué piezas del avión surge con más frecuencia durante el vuelo la tensión máxima del campo eléctrico, debido a su movimiento en el campo magnético de la Tierra?

11.1.2. Un conductor recto de 0,3 m de longitud se mueve transversalmente al campo magnético de inducción de 0,1 T a velocidad de 1 m/s. ¿Cuál será la tensión del campo eléctrico entre los extremos del conductor?

11.1.3. El vector de inducción B del campo magnético es perpendicular al plano de un marco cuadrado de alambre. Hállese la



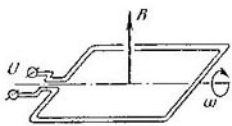
Para el problema 11.1.2.



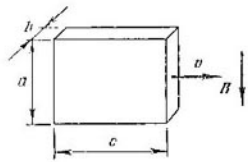
Para el problema 11.1.3.

distribución de la intensidad del campo eléctrico a lo largo del alambre del marco, si este último se mueve en sentido transversal al campo con la velocidad constante v.

11.1.4. La inducción de un campo magnético permanente se mide con ayuda de un marco cuadrado $a \times a$ que gira a la velocidad



Para el problema 11.1.4.



Para el problema 11.1.5.

angular ω. El eje de rotación es perpendicular al sentido del campo magnético. La amplitud de la tensión eléctrica, que se toma del marco, es igual a U. Hállese la inducción del campo magnético [1]).

11.1.5. Una barra metálica $a \times b \times c$ ($b \ll a, c$) se mueve a la velocidad v en un campo magnético de inducción B de la manera

[1]) En el § 11.1 se menosprecia la inducción del campo magnético de la corriente en los conductores.

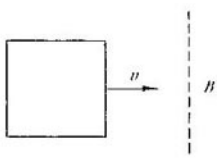
expuesta en la figura. Hállese la diferencia de potencial entre los lados laterales y la densidad superficial de las cargas en ellos.

11.1.6. Supongamos que el átomo puede representarse como una esfera de radio r, cargada uniformemente con carga eléctrica negativa, y en cuyo centro se encuentra un núcleo puntual con carga Ze. Hállese con qué velocidad debe moverse semejante átomo transversalmente al campo magnético con inducción B para ionizarse.

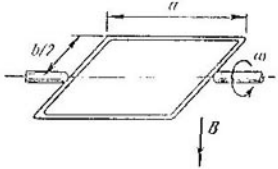
11.1.7. Estímese al mantener qué inducción del campo magnético se desintegrará un átomo de hidrógeno que irrumpe en él con una velocidad, próxima a la de la luz.

11.1.8. En un campo magnético homogéneo de inducción B distando l uno de otro se encuentran dos listones metálicos verticales, situados en el plano perpendicular a las líneas de fuerza del campo. Por los listones puede deslizarse sin fricción un conductor de masa m. ¿Cómo se moverá el conductor, si los extremos superiores de los listones se cortocircuitan con la resistencia R? ¿En qué tipos de energía se transforma el trabajo de la fuerza de gravedad? La aceleración de la caída libre es g.

11.1.9. Una espira cerrada cuadrada de alambre, la longitud de cuyo lado es b y la resistencia de la unidad de longitud ρ, pasa a



Para el problema 11.1.9.



Para el problema 11.1.10.

velocidad constante v entre las zapatas de un electroimán que crea un campo magnético homogéneo de inducción B. Considerando que el campo fuera de las zapatas es nulo, determínese la energía que se transforma en calor, para los casos en que la dimensión de las zapatas en dirección del movimiento de la espira $a < b$ y $a > b$.

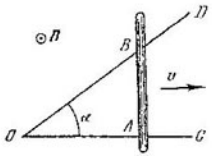
11.1.10. El cuadro $a \times b$ se introduce en un campo magnético de inducción B, con la particularidad de que en el instante inicial el plano del cuadro es perpendicular a las líneas de fuerza del campo. El cuadro gira a la velocidad angular ω.

a) Trácese la gráfica de la dependencia entre la corriente que circula por el cuadro y el tiempo. La resistencia del cuadro es R. Menospréciese la inductancia.

b) ¿Cómo depende del tiempo el momento de fuerzas, necesario para mantener la velocidad constante de rotación del cuadro?

11.1.11*. La varilla metálica AB, que posee una resistencia de la unidad de longitud ρ, se mueve a velocidad constante v ($v \perp AB$),

conectando dos conductores ideales OC y OD, que forman el ángulo α. La longitud OC es igual a l y $AB \perp OC$. Todo el sistema se encuentra en un campo magnético homogéneo permanente de inducción B, perpendicular al plano del sistema. Hállese la cantidad total de calor que se desprenderá en el circuito durante el movimiento de la varilla desde el punto O hasta el punto C.

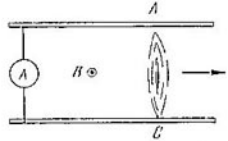


Para el problema 1.1.11*.

11.1.12. En el esquema más sencillo de un generador hidrodinámico magnético un condensador plano, con área de las placas S y distancia entre ellas d, se introduce en un flujo de líquido conductor con conductividad λ. El líquido se mueve a velocidad constante v paralelamente a las placas. El condensador se encuentra en un campo magnético de inducción B, dirigido perpendicularmente a la velocidad del líquido y de modo paralelo a los planos de las placas. ¿Qué potencia se desprenderá en el circuito exterior que posee la resistencia R?

11.1.13. Por una banda conductora de anchura d fluye una corriente I. La cinta se encuentra en el campo magnético de inducción B. La dirección del campo es perpendicular al plano de la

Para el problema 11.1.13.



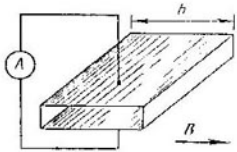
Para el problema 11.1.14.

banda. Hállese la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 mostrados en la figura. El grosor de la banda es h y la densidad volumétrica de los portadores de corriente es ρ.

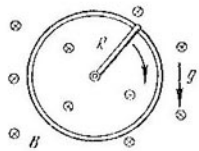
11.1.14. a) Un acelerador de rieles para el plasma consta de dos conductores paralelos, dispuestos en un mismo plano, perpendicular al campo magnético de inducción B. Entre los puntos A y C en hidrógeno se incendia una descarga. La corriente I en la descarga se mantiene constante. Bajo la influencia del campo magnético la zona de la descarga se desplaza, adquiriendo gran velocidad en los extremos de los rieles, y se desprende de ellos. ¿Cuál es la velocidad del cúmulo de plasma, si su masa es m? La distancia entre los rieles es l y la longitud del tramo en que transcurre la aceleración del plasma, L.

b) Resuélvase el problema a) para $B = 1$ T, $l = 0{,}1$ m, $L = 1$ m, $I = 10$ A; en el cúmulo de plasma hay 10^{23} iones de hidrógeno.

11.1.15. Un tubo de sección rectangular $a \times b$ está lleno de gas con densidad ρ. Las paredes verticales del tubo son aisladores; las horizontales, electrodos. En la sección extrema se ceba una descarga, después de lo cual la corriente I se mantiene de modo permanente. El arco que surge es arrastrado por las fuerzas magnéticas hacia dentro del tubo, «arrebatando» el gas situado delante de sí.



Para el problema 11.1.15.

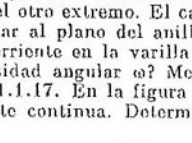


Para el problema 11.1.16*.

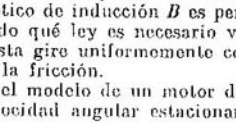
Determínese la velocidad estacionaria del «tapón» de plasma, considerando que ella todo el tiempo supera la velocidad del sonido en el gas. El campo magnético de la inducción B es perpendicular a las paredes verticales del tubo.

11.1.16*. En el campo de gravedad se coloca verticalmente un anillo metálico. Cierta varilla metálica de longitud R y masa m se empalma a charnela en el centro del anillo y contacta con éste con el otro extremo. El campo magnético de inducción B es perpendicular al plano del anillo. ¿Siguiendo qué ley es necesario variar la corriente en la varilla para que ésta gire uniformemente con la velocidad angular ω? Menospréciese la fricción.

11.1.17. En la figura se muestra el modelo de un motor de corriente continua. Determínese la velocidad angular estacionaria y



Para el problema 11.1.17*.

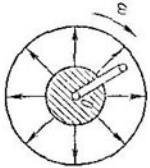


Para el problema 11.1.18*.

la corriente en el circuito, si la fuerza de fricción en el contacto móvil es F.

11.1.18*. Un disco conductor gira a velocidad angular ω en un campo magnético homogéneo de inducción B, que es perpendicular al plano del disco. ¿Qué indicará el amperímetro conectado a través de la resistencia R? Hállese el valor numérico de la corriente si $R = 1\ \Omega$, el radio del disco $r = 0{,}05$ m, $\omega = 2\pi \cdot 50\ \text{s}^{-1}$ y $B = 1$ T.

11.1.19. En el eje O se fija a charnela uno de los lados de un marco cuadrado de alambre $a \times a$. Alrededor de este mismo eje gira a velocidad angular ω un imán que crea en la zona donde se encuentra el marco, un campo magnético radial. Determínese la velocidad angular del marco, si la resistencia de la unidad de longitud de éste es ρ, el momento de las fuerzas de fricción en el eje es M y la inducción del campo magnético en el extremo del marco, B.



Para el problema 11.1.19.

11.1.20. Una dinamo con fem de 12 V y resistencia interna de 0,2 Ω carga una pila de acumuladores con fem de 10 V y resistencia interna de 0,6 Ω. Una bombilla con resistencia de 3 Ω se conecta paralelamente a la pila. Determínense las corrientes en la pila y bombilla.

11.1.21. ¿Por qué el motor eléctrico puede inflamarse, si paramos su rotor?

11.1.22. Un motor eléctrico de corriente continua, conectado en el circuito de una pila con fem de 24 V, siendo la impedancia del circuito de 20 Ω efectúa 600 rpm para la corriente en el circuito de 0,2 A. ¿Qué fem desarrollará ese mismo motor, funcionando como una dinamo a 1200 rpm?

11.1.23. ¿Cuántas revoluciones por unidad de tiempo desarrollará un electromotor de corriente continua con imán permanente, conectado en el circuito con fem $\mathcal{E}$ para la impedancia del circuito R si, funcionando como dinamo, desarrolla una fem $\mathcal{E}_1$ para el número de revoluciones por unidad de tiempo n_1 y el momento de fuerzas de fricción en el eje del motor es igual a M?

11.1.24. ¿Qué fem desarrolla una dinamo de corriente continua, si siendo la resistencia del circuito de 300 Ω para su rotación se gasta una potencia de 50 W y las pérdidas en fricción son un 4 por 100 de la potencia?

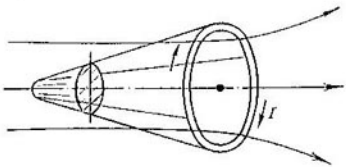
11.1.25*. Un extremo del cable de la línea de tranvía está bajo una tensión continua U con respecto a la tierra. ¿A qué distancia de este extremo de la línea se encuentra el tranvía, dotado de dos motores iguales y con qué velocidad éste se mueve si al conectar los motores en serie, la corriente en la línea es I_1, mientras que al hacerlo en paralelo es I_2 y la velocidad del tranvía durante dicha conexión no varía? La fuerza de fricción es F, la resistencia de la unidad de longitud del cable es ρ y la resistencia del arrollamiento de cada motor es R.

11.1.26*. Los inducidos de dos electromotores idénticos de corriente continua son coaxiales y se unen rígidamente uno con otro. A los arrollamientos de los inducidos se conectan las mismas fuentes de corriente con fem $\mathcal{E}$. En este caso la velocidad angular de rotación para los inducidos con carga es igual a ω_0. Si frenamos los motores completamente, la corriente en los inducidos será I_0. Una de las

fuentes se conecta de manera que los momentos torsores de los motores se inviertan. ¿Qué momento es necesario aplicar a los inducidos unidos para que giren con la velocidad angular prefijada ω? La fricción en los motores es menospreciablemente pequeña; el campo magnético del estator se crea mediante un imán permanente.

11.1.27. En un campo magnético desde gran altura cae cierto anillo con radio a y masa m. El plano del anillo permanece todo el tiempo horizontal. Hállese la velocidad estacionaria de la caída del anillo, si la componente vertical de la inducción del campo magnético cambia con la altura según la ley $B = B_0 (1 + \alpha h)$. La aceleración de la gravedad es g y la resistencia del anillo es R.

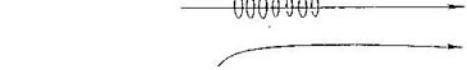
11.1.28. En un campo magnético de simetría axial un cuerpo puede acelerarse, manteniendo una corriente continua I en la espira



Para el problema 11.1.28.

ligada con el cuerpo y orientada perpendicularmente al eje de simetría del campo. Demuéstrese que el incremento de la energía cinética del cuerpo junto con la espira es proporcional al incremento del flujo magnético a través de la espira y hállese el factor de proporcionalidad.

11.1.29. Una espira de área S está situada perpendicularmente al campo magnético de inducción B. La misma está conectada a través del galvanómetro con resistencia R. ¿Qué carga circulará por dicho galvanómetro, si giramos la espira de modo paralelo al campo?



Para el problema 11.1.30*.

11.1.30*. La bobina de un captador del campo magnético se fabrica de alambre de cobre con un diámetro de 0,2 mm. El radio de la bobina es de 1 cm. La resistividad es de $1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$m. El captador determina la inducción del campo magnético por la carga

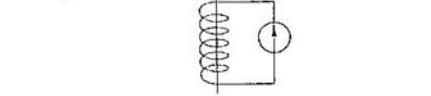
que pasa a través de la bobina, conectada con el galvanómetro, cuando ésta se introduce en el campo magnético de manera que el eje de la bobina coincida con la dirección del campo. Determínese la inducción del campo magnético, si por el galvanómetro, al introducir la bobina en el campo, pasa una carga de 10^{-4} C.

§ 11.2. Campo eléctrico rotacional

11.2.1. ¿Cuál era el flujo magnético a través del área, limitada por un contorno (circuito) cerrado, si al disminuir uniformemente este flujo hasta cero en el transcurso de 1 s en el circuito surge una fem con inducción de 1 V, 100 V y 1 CGS?

11.2.2. La inducción de un campo magnético homogéneo dentro de cierto cilindro con radio $R = 0{,}1$ m aumenta linealmente con el tiempo: $B = \alpha t$ (el coeficiente $\alpha = 10^{-3}$ T/s). El campo magnético está orientado a lo largo del eje del cilindro. Fuera de este último no hay campo. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico rotacional a la distancia $L = 0{,}2$ m del eje del cilindro?

11.2.3. Un anillo conductor, que en el diámetro tiene un puente de unión con una bombilla, pasa sobre el extremo de un solenoide con corriente de manera que el plano del anillo es perpendicular al eje del solenoide y el puente de unión con la bombilla es perpendi-



Para el problema 11.2.3.

cular a la dirección de la velocidad del movimiento. En las posiciones A y B del anillo la bombilla se enciende, mientras que en la posición C se apaga. Explíquese el efecto observado.

11.2.4. La inducción del campo magnético dentro de un cilindro de radio de 8 cm aumenta con el tiempo según la ley $B = \alpha t^2$ (el coeficiente $\alpha = 10^{-4}$ T/s^2). El campo magnético está dirigido a lo largo del eje del cilindro. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico rotacional a la distancia de 0,1 m del eje de cilindro en los instantes $t_1 = 1$ s y $t_2 = 4$ s?

11.2.5. Por dos planos paralelos infinitos fluyen dos corrientes idénticas en módulo, pero con direcciones opuestas, sus densidades

superficiales varían según la ley: $j = \alpha t$. Hállese la distribución de la intensidad del campo eléctrico rotacional entre estos planos.

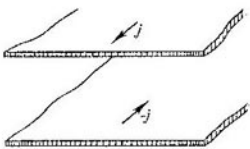
11.2.6. A través de un solenoide, cuya longitud es de 20 cm y el radio de 2 cm, circula una corriente sinusoidal $I = I_0 \operatorname{sen}(2\pi\nu t)$, donde $I_0 = 10$ A, $\nu = 50$ Hz. La cantidad de espiras en el solenoide es igual a 200. Hállese la distribución de la intensidad del campo eléctrico rotacional dentro del solenoide. ¿Cuál es la amplitud de la tensión, creada por ese campo en la bobina con 5 cm de longitud y 1 cm de radio, colocada dentro del solenoide a lo largo de su eje? La cantidad de espiras en esta bobina es igual a 100.

11.2.7. La velocidad de variación del flujo magnético a través de una superficie, limitada por un circuito cerrado, es igual a φ.

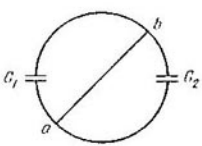
a) Determínese la carga en un condensador de capacidad C que interrumpe dicho circuito.

b) El circuito se interrumpe mediante dos condensadores con capacidades C_1 y C_2. Determínense las cargas en las armaduras de los condensadores.

11.2.8. a) Un circuito tiene la forma de una circunferencia y se interrumpe mediante dos condensadores con capacidades C_1 y C_2.



Para el problema 11.2.5.



Para el problema 11.2.8.

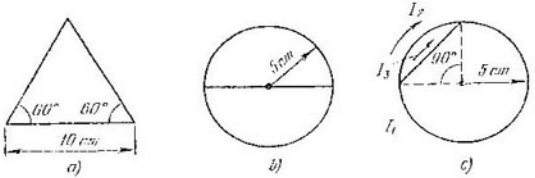
El circuito se une en el diámetro con el conductor ab. Determínense las cargas en las armaduras de los condensadores. El campo magnético, que crea el flujo magnético, es homogéneo y la velocidad de variación del flujo magnético a través del circuito es φ.

b*) ¿Qué carga debería tener el condensador con capacidad C_3 para romper el conductor ab en el problema a)?

11.2.9. En la figura vienen mostradas figuras planas, hechas de alambre, con resistencia de la unidad de longitud igual a 1 Ω/m. Determínense las corrientes en ellas, si las figuras se introducen en un campo magnético homogéneo que varía con el tiempo. La velocidad de variación del flujo magnético a través de la unidad de área es de 1 Wb/(m²·s).

11.2.10*. Una espiral plana con gran cantidad de espiras y radio exterior R se encuentra en un campo magnético homogéneo, cuya inducción es perpendicular al plano de la espiral y varía según la ley $B = B_0 \cos \omega t$. Hállese la fem de la inducción en la espiral. La distancia entre sus espiras es constante.

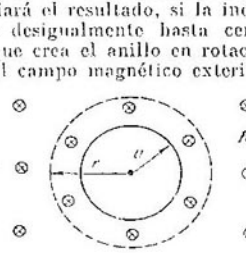
11.2.11*. En un anillo aislante con masa m y radio R se distribuye uniformemente cierta carga q. El anillo puede girar libremente alrededor de su eje. En el instante inicial el anillo se encuentra en reposo. En la zona central del anillo de radio $a < R$ existe un campo magnético con inducción B_0 perpendicular al plano del anillo.



Para el problema 11.2.9.

La inducción del campo magnético disminuye uniformemente hasta cero. ¿Qué velocidad angular adquirirá el anillo hacia el instante en que desaparezca el campo? ¿Cambiará el resultado, si la inducción del campo magnético disminuye desigualmente hasta cero? La inducción del campo magnético, que crea el anillo en rotación, es mucho menor que la inducción del campo magnético exterior.

Para el problema 11.2.10*.



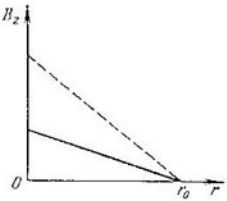
Para el problema 11.2.12*.

11.2.12*. Fuera de un cilindro con radio a la inducción del campo magnético homogéneo aumenta linealmente con el tiempo: $B_0 = \alpha t$. ¿Cómo deberá cambiar con el tiempo la inducción del campo magnético homogéneo dentro del cilindro para que el electrón se mueva describiendo una circunferencia de radio $r > a$? Cuando $t = 0$ el electrón estaba en reposo.

11.2.13*. En un campo magnético homogéneo el electrón se mueve describiendo una circunferencia de cierto radio. ¿Disminuye o aumenta el radio de curvatura de la trayectoria del electrón, al aumentar lentamente la inducción del campo magnético?

11.2.14*. La inducción del campo magnético depende de la distancia hasta el eje z de la manera mostrada en la figura. El campo

magnético está dirigido a lo largo del eje z. ¿A qué distancia del eje gira un electrón que, al crecer el campo, permanece en su órbita? ¿En cuánto aumenta la energía de dicho electrón al elevarse al décuplo la inducción del campo? ¿Cómo se moverán los electrones que se movían por otras órbitas circulares, al crecer el campo?



Para el problema 11.2.14*.

11.2.15*. En la superficie de un cilindro enterizo aislante y largo de radio R está distribuida uniformemente cierta carga con la densidad superficial σ. El campo magnético homogéneo exterior de inducción B_0 está orientado a lo largo del eje del cilindro. Determínese la velocidad angular de rotación para el cilindro después de desconectar el campo exterior. La densidad de la substancia del cilindro es ρ.

11.2.16*. Al acelerar las cargas, aparecen campos eléctricos rotacionales que, si se menosprecia la radiación, son proporcionales a la aceleración. Por eso estos campos eléctricos ejercen una fuerza $F = m_{em}a$ sobre una carga que se mueve con la aceleración a. El factor de proporcionalidad m_{em} puede denominarse masa electromagnética de la carga.

a) ¿En cuánto la masa electromagnética del electrón en un solenoide largo, con radio de 0,1 m y con el número de espiras por unidad de longitud del solenoide de 10^3 m^{-1}, supera la masa del electrón libre? La sección del cable del solenoide es de 1 mm^2 y la cantidad de electrones de conducción en unidad de volumen es de 10^{23} cm^{-3}.

b) ¿Qué parámetros deberá poseer el solenoide para que en él la masa electromagnética del electrón sea igual a la masa del electrón libre? La cantidad de electrones de conducción en unidad de volumen para el material del solenoide es de 10^{23} cm^{-3}.

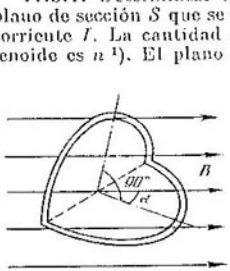
11.2.17*. Un condensador plano se mueve con aceleración de modo paralelo a sus placas. Si la aceleración es suficientemente pequeña, el campo eléctrico rotacional en el instante en que la velocidad del condensador es igual a v, puede calcularse de la siguiente manera. Primero se calcula la inducción del campo magnético como para un condensador que se mueve de modo uniforme a velocidad v, y luego, haciendo uso de la variación de la inducción de dicho campo magnético con el tiempo, se determina la intensidad del campo eléctrico rotacional. Sean la carga del condensador q y la capacidad C. Calcúlese su aceleración bajo la acción de la fuerza exterior F, si la masa del condensador sin carga es igual a m. La fuerza F está dirigida a lo largo de las placas.

11.2.18*. Los experimentos en los haces electrón-electrónicos encontradizos mostraron que la carga del electrón se distribuye en

una zona, cuyas dimensiones son inferiores a 10^{-18} m. Estímese el límite superior de la masa electromagnética del electrón. Propóngase una hipótesis que explicase el por qué la masa electromagnética obtenida m_{em} del electrón es mucho mayor que la masa del electrón libre m_e.

§ 11.3. Inductancia mutua. Inductancia de los conductores. Transformadores

11.3.1. Determínese el flujo magnético a través de un contorno plano de sección S que se encuentra dentro de un solenoide largo con corriente I. La cantidad de espiras por unidad de longitud del solenoide es n [1]). El plano de la espira se encuentra formando el ángulo α hacia el eje del solenoide. Hállese la inductancia mutua del contorno y del solenoide.



Para el problema 11.3.2.

11.3.2. Una espira de radio R se dobla por el diámetro bajo un ángulo recto y se coloca dentro de un solenoide largo de manera que uno de los planos resulta estar formando el ángulo α respecto al eje del solenoide, en tanto que el otro, el ángulo $\pi/2 - \alpha$. El número de espiras por unidad de longitud del solenoide es n. ¿Cuál es la inductancia mutua de la espira doblada y del solenoide?

11.3.3. Dentro de un solenoide largo se encuentra coaxialmente a él otro solenoide corto de radio r. El número de espiras del solenoide interior es N y la cantidad de espiras por unidad de longitud del solenoide exterior, n. ¿Cuál es la inductancia mutua de estos solenoides?

11.3.4. Un solenoide corto abarca otro solenoide largo de radio r. El número de espiras del solenoide corto es N y la cantidad de espiras por unidad de longitud del solenoide largo, n. A través del solenoide corto fluye la corriente $I = I_0 \operatorname{sen} \omega t$. Determínese la tensión en los extremos del solenoide largo.

11.3.5. ¿Cuál es la inductancia de un solenoide de radio R y longitud l ($R \ll l$)? La cantidad de espiras por unidad de longitud del solenoide es n.

11.3.6. Las corrientes distribuidas uniformemente en dos planos paralelos $a \times b$ tienen sentido opuesto. La distancia entre los planos es h. Estímese la inductancia de los planos, si h es mucho menor que las dimensiones lineales de los planos.

11.3.7*. La línea consta de dos envolturas cilíndricas finas coaxiales de radios a y b ($a < b$). El espacio entre ellas está lleno de

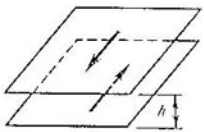
[1]) En todos los problemas considérese que el paso de la espira es mucho menor que el radio del solenoide.

una substancia con permeabilidad magnética μ. Hállese la inductancia de la línea por unidad de longitud. Por los cilindros circulan corrientes iguales en módulo, pero de sentido opuesto.

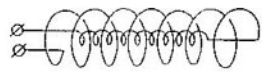
11.3.8*. Dentro de una envoltura cilíndrica fina y conductora de radio a se encuentra un cable coaxial de radio b, cuya permeabilidad magnética es μ_1. El espacio entre ellos está lleno de una substancia con permeabilidad magnética μ_2. Hállese la inductancia de la línea por unidad de longitud. La corriente que circula en el cable es igual en módulo a la corriente que fluye por la envoltura cilíndrica, pero de dirección contraria. Considérese que la corriente en el cable está distribuida uniformemente por su sección.

11.3.9*. Hállese la inductancia por unidad de longitud de una línea bifilar. La línea consta de dos cables rectos y paralelos con radio a, la distancia entre las líneas axiales es $h \gg a$. Por los cables fluyen corrientes iguales en módulo, pero de direcciones contrarias. El campo magnético dentro de los cables está ausente.

11.3.10. ¿Cuál es la inductancia de dos solenoides de radios R_1 y R_2, unidos de la manera expuesta en la figura? El solenoide exterior tiene la longitud l_1 y el interior, l_2. La cantidad de espiras por unidad de longitud del solenoide exterior es n_1 y la del interior, n_2. Examínense los casos en que las direcciones de las corrientes en las espiras de ambos solenoides son: a) las mismas; b) contrarias.



Para el problema 11.3.6.


Para el problema 11.3.10.

11.3.11. Aumentamos todas las dimensiones de un conductor k veces. ¿Cómo cambiará la inductancia del conductor?

11.3.12. El volumen del solenoide $V = 10\ l$, su inductancia $L = 0{,}01$ H. Al solenoide se aplica la tensión $U = 10$ V. ¿Dentro de cuánto tiempo después de aplicar la tensión, la inducción del campo magnético en el solenoide valdrá $B = 0{,}1$ T?

11.3.13. El circuito consta de dos bobinas acopladas en serie con inductancias L_1 y L_2. La inductancia mutua de las bobinas es L_{12}. Hállese la inductancia total del circuito. ¿Cómo cambiará la inductancia total, si las espiras de una bobina se arrollan en sentido opuesto?

11.3.14*. En un núcleo se enrollan dos bobinas. Las inductancias de las bobinas por separado son L_1 y L_2. ¿Cuál es la inductancia mutua? Menospréciese la disipación del campo magnético.

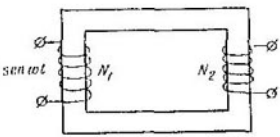
11.3.15*. En el arrollamiento primario del transformador fluye la corriente $I_0 \operatorname{sen} \omega t$. El flujo magnético, creado por dicha corriente,

pasa prácticamente por completo por el núcleo de hierro del transformador. La permeabilidad magnética del núcleo es μ. Determínese la fem de inducción en el arrollamiento secundario abierto, si la cantidad de espiras en el primario es N_1 y en el secundario, N_2. ¿Qué tensión se aplica al primario? La sección del núcleo del transformador es S. La longitud eficaz del núcleo es l.

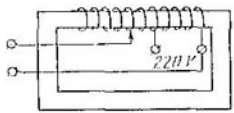
11.3.16. La corriente en el (arrollamiento) primario del transformador aumenta uniformemente. ¿Cambiará la tensión en el (arrollamiento) secundario?

11.3.17. Muéstrese que en el transformador sin pérdidas con el secundario cortocircuitado tiene lugar la relación $I_1/I_2 = N_2/N_1$, donde I_1 e I_2 son las corrientes, en tanto que N_1 y N_2, la cantidad de espiras en los arrollamientos.

11.3.18*. a) ¿Por qué es peligroso el cortocircuito de aunque sólo sea en una espira del secundario del transformador?



Para el problema 11.3.15*.



Para el problema 11.3.19.

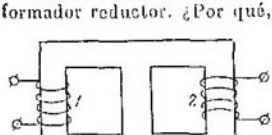
b) El cortocircuito de una espira del secundario conduce a veces al deterioro del primario del transformador. ¿Por qué ocurre eso?

11.3.19. Explíquese la estructura del transformador regulable para laboratorios.

11.3.20. ¿Por qué el transformador en funcionamiento emite zumbidos? ¿Cuál es la frecuencia fundamental del sonido, si el transformador está conectado a la red de frecuencia industrial?

11.3.21. ¿Para qué el núcleo del transformador se arma de placas separadas?

11.3.22. Para alimentar el timbre eléctrico se utiliza un transformador reductor. ¿Por qué, por lo general, el botón (interruptor) del timbre se conecta al secundario, mientras que el primario permanece conectado constantemente a la red?



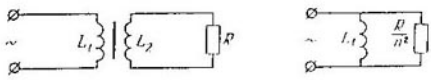
Para el problema 11.3.23.

11.3.23. En un núcleo de hierro se enrollan dos bobinas. El flujo magnético, creado por cada bobina, no sale del núcleo y se divide a medias en las derivaciones. Al conectar la bobina 1 al circuito de corriente alterna con tensión de 40 V, la tensión en la bobina 2 es igual a 10 V. ¿Qué tensión habrá en los bornes abiertos de la bobina

I, si la bobina *2* se conecta al circuito de corriente alterna con tensión de 10 V?

11.3.24*. Se dispone de dos transformadores ideales idénticos con relación de transformación 1 : 3. El primario de uno de ellos se une en serie con el secundario del segundo, y los terminales libres de estos arrollamientos se conectan a la red de corriente alterna con tensión de 100 V. El secundario del primer transformador se une en serie con el primario del segundo transformador. Determínese la amplitud de la tensión alterna entre los otros terminales de los arrollamientos.

11.3.25*. Muéstrese que el transformador sin disipación, cuya resistencia óhmica de los arrollamientos puede menospreciarse y



Para el problema 11.3.25*.

que funciona para una carga óhmica, representa para la fuente de fem la misma carga que el circuito, mostrado en la figura a la derecha (n es la relación de transformación).

11.3.26*. Dos arrollamientos: el primario con 2000 espiras y el secundario con 4000 espiras, están devanados en un núcleo toroidal hecho de ferrita con permeabilidad magnética $\mu = 2000$. Cuando al arrollamiento primario se aplica la tensión de 100 V, en el secundario abierto había 199 V. Hállese qué tensión habrá en el secundario abierto, si el núcleo se sustituye por otro de las mismas dimensiones, pero hecho de ferrita con $\mu' = 200$. Menospréciense la disipación del flujo magnético y las pérdidas en el núcleo.

11.3.27*. Obténgase la fórmula de inductancia de un solenoide sin menospreciar la influencia de la masa del electrón m_e sobre la inductancia. La sección del cable del solenoide es S; la cantidad de electrones de conducción en la unidad de volumen es n_e; la longitud, el radio y el número de espiras en el solenoide son iguales a l, R y N, respectivamente. ¿Se podrá menospreciar esta influencia para las inductancias que se utilizan en radiotecnia?

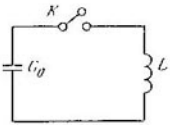
§ 11.4. Circuitos eléctricos de corriente alterna

11.4.1. Una pila sin resistencia interna se conecta a un solenoide con inductancia L. Determínese la corriente en función del tiempo, si la fem de la pila es $\mathcal{E}$. Hállese el trabajo de la pila durante el tiempo τ. ¿En qué tipo de energía se transforma este trabajo?

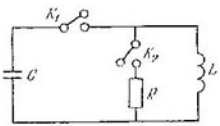
11.4.2*. Un generador con fem $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$ en el instante $t = 0$ se conecta a una bobina de inductancia L. Determínese la corriente en el circuito en función del tiempo.

11.4.3. En el circuito que consta de un condensador cargado C_0 y un solenoide de inductancia L se cierra el interruptor K. ¿De qué manera, en función del tiempo t, es necesario variar la capacidad del condensador, para que la corriente en el circuito crezca de modo directamente proporcional al tiempo?

11.4.4. En el circuito, mostrado en la figura, el condensador C está cargado hasta la tensión U_0. Primero el interruptor K_1 se cierra.



Para el problema 11.4.3.



Para el problema 11.4.4.

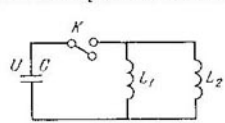
En el instante en que la corriente a través de la inductancia L alcanza su valor máximo, se cierra el interruptor K_2, desconectando simultáneamente el interruptor K_1. ¿Cuál será el valor máximo de la tensión en la resistencia R?

11.4.5. a) ¿En qué momento chispea un interruptor: al conectarlo o desconectarlo? ¿Por qué el chisporroteo cesa si acoplamos un condensador en paralelo al interruptor?

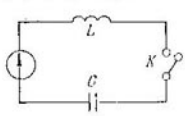
b) La frecuencia de la tensión en un circuito eléctrico es ν y la inductancia, L. ¿Qué capacidad es necesario conectar en paralelo a la inductancia para obtener, al interrumpir el contacto, una n-múltiple sobretensión? Determínese la mencionada capacidad para el caso $\nu = 50$ Hz, $L = 0{,}1$ H y $n = 10$.

11.4.6. Una fuente con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna nula se conecta en el instante $t = 0$ a una inductancia L y una capacidad C, unidas en serie. Hállese la corriente máxima en el circuito y la carga máxima del condensador.

11.4.7. Hállense las corrientes máximas en las inductancias L_1 y L_2 después de cerrar el interruptor K en el circuito mostrado en la figura. La capacidad del condensador es C y la tensión inicial, U.



Para el problema 11.4.7.

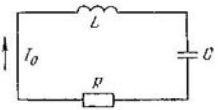


Para el problema 11.4.8.

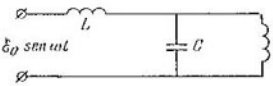
11.4.8. En el circuito, mostrado en la figura, en el instante $t = 0$ se cierra el interruptor. Determínese la corriente en el circuito, si: a) la fuente suministra una tensión continua U_0; b) la fuente da una

tensión cosinusoidal $U_0 \cos \omega t$. Determínese la corriente máxima, si $U_0 = 100$ V, $L = 10^{-2}$ H, $C = 10^{-3}$ F, $\nu = \omega/2\pi = 50$ Hz.

11.4.9*. En el instante $t = 0$ la corriente en el circuito es igual a I_0 y la tensión en la inductancia es nula. Hállese la corriente en los instantes posteriores. ¿Dentro de cuánto tiempo la energía electromagnética del circuito disminuirá a la mitad? Considérese $R \ll \sqrt{L/C}$.



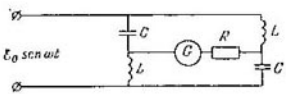
Para el problema 11.4.9*.



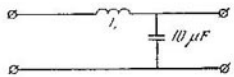
Para el problema 11.4.10.

11.4.10. Hállese la corriente estacionaria en el circuito mostrado en la figura. Las bobinas no poseen inductancia mutua.

11.4.11. ¿Qué corriente circula por el galvanómetro en el circuito mostrado en la figura, si $\omega = 1/\sqrt{LC}$?



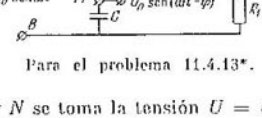
Para el problema 11.4.11.



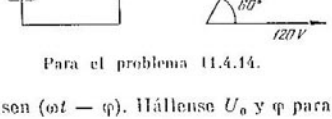
Para el problema 11.4.12.

11.4.12. Elíjase la inductancia de la bobina de choque L de manera que la amplitud de la tensión U_2 en la salida del filtro, siendo la frecuencia de 100 Hz, sea 10 veces menor que la amplitud U_1 en la entrada.

11.4.13*. Se dispone de un circuito desplazador de fase. A los bornes A y B se aplica la tensión $V = V_0 \operatorname{sen} \omega t$ y de los bornes M y N se toma la tensión $U = U_0 \operatorname{sen} (\omega t - \varphi)$. Hállense U_0 y φ para $RC = R_1C_1$.



Para el problema 11.4.13*.

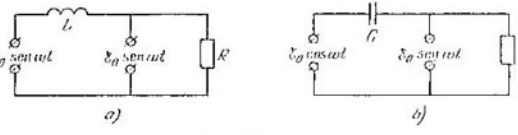


Para el problema 11.4.14.

11.4.14. Los valores de la tensión, corriente y el desfasaje entre la tensión y la corriente en el circuito de la carga se muestran en el

diagrama vectorial. Determínese la amplitud de la fem para la fuente, si $R = 10\ \Omega$.

11.4.15. Hállense las corrientes estacionarias en los circuitos eléctricos mostrados en la figura. Las resistencias internas de las fuentes de tensión son nulas. Determínense las potencias medias que

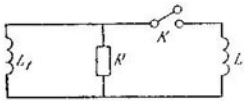


Para el problema 11.4.15.

se disipan en los circuitos, si $\mathcal{E}_0 = 200$ V, $R = 100\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ F y $L = 1$ H. La frecuencia de la tensión de la fuente $\omega = 2\pi \cdot 50\ \text{s}^{-1}$.

11.4.16. En la red urbana se conecta una bobina con inductancia L en serie a un hornillo eléctrico. La potencia de este último se reduce a la mitad. Hállese la inductancia. La resistencia de funcionamiento del hornillo $R = 50\ \Omega$. La resistencia de la bobina puede menospreciarse.

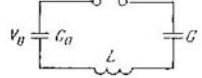
11.4.17*. En el instante en que la corriente en la bobina de inductancia L_1 es I, el interruptor K se cierra. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá en la resistencia R después de cerrar el interruptor?



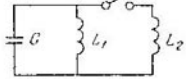
Para el problema 11.4.17*.

11.4.18. Un circuito eléctrico, que consta de dos bobinas de inductancia y una bombilla, se conecta a un generador de tensión alterna. Si en una de las bobinas se introduce un núcleo de hierro, la luminosidad de la bombilla se intensifica. Pero si el núcleo se introduce en la segunda bobina, la luminosidad se debilita. Compóngase el esquema del circuito eléctrico.

11.4.19*. La tensión inicial en el condensador C_0 es igual a V_0. ¿Dentro de cuánto tiempo después de cerrar el interruptor K se



Para el problema 11.4.19*.

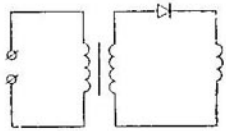


Para el problema 11.4.20*.

perforará el condensador C, si su ruptura eléctrica tiene lugar a tensión V?

11.4.20*. Un condensador de capacidad C, cargado hasta la

tensión U_0, se descarga a través de la inductancia L_1. ¿Qué corriente máxima puede obtenerse en la inductancia L_2, si el interruptor K se cierra en el instante en que la corriente en la inductancia L_1 es la máxima?

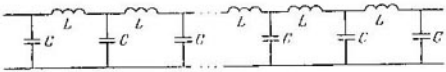


Para el problema 11.4.21b.

11.4.21. a) Al pasar al estado superconductor, sólo una parte pequeña de electrones se mueve sin resistencia. Un solenoide superconductor de inductancia L se pone en funcionamiento, para lo cual durante el tiempo t le aplican cierta tensión constante. La corriente máxima en el solenoide es I. Determínese el límite superior del calor que se desprende en el solenoide al ponerlo en funcionamiento. Antes de pasar al estado superconductor, la resistencia del solenoide era R.

b) ¿Cómo cambiará este límite, en caso de que el solenoide se ponga en funcionamiento de una red de corriente alterna mediante el circuito expuesto en la figura? Menospréciense las pérdidas en el transformador y diodo.

11.4.22*. Al propagarse las ondas sinusoidales en una cadena LC ilimitada la fase de las oscilaciones de la tensión en cada nodo



Para el problema 11.4.22*.

retarda en φ de la fase de oscilaciones en el nodo anterior. Determínese la dependencia entre φ y ω, L, C. ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda sinusoidal por la cadena LC, si la longitud de cada célula es l? ¿Cuándo esta velocidad no depende de ω?

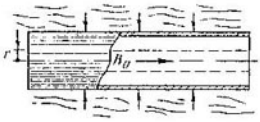
§ 11.5. Conservación del flujo magnético. Superconductores en un campo magnético

11.5.1. ¿Por qué al deformar un anillo superconductor con corriente, el flujo magnético total a través del anillo se conserva?

11.5.2. Una envoltura metálica cilíndrica y larga de radio R, situada en un campo magnético permanente de inducción B_0, se comprime mediante una explosión hasta el radio r. Determínese la inducción del campo magnético dentro de la envoltura comprimida. Menospréciese la resistencia óhmica de la envoltura.

11.5.3. ¿En cuánto variará la corriente en dos anillos finos idénticos, que distan mucho uno del otro, hechos de un superconductor con una corriente I, al unirlos?

11.5.4. Cuando en un solenoide largo superconductor, que está cortocircuitado y por el que circula cierta corriente, se introduce una barra superconductora, la corriente en el solenoide aumenta tres veces. Determínese en cuánto la sección del solenoide supera la sección de la barra.



Para el problema 11.5.2.

11.5.5. Un solenoide largo cortocircuitado con corriente I, fabricado de un superconductor, se comprime de manera que su longitud disminuye 3 veces. ¿Cómo cambiará la corriente en el solenoide?

11.5.6. Por una bobina superconductora cortocircuitada fluye la corriente media I_0. La longitud de la bobina varía según la ley $l = l_0 + a \cos \omega t$. Hállese la dependencia entre la corriente y el tiempo.

11.5.7. El flujo magnético del campo exterior a través del contorno de un anillo superconductor es igual a Φ_0. ¿Cómo variará la corriente del anillo, si desconectamos el campo magnético exterior?

11.5.8. Un anillo superconductor de inductancia L, en el que circula la corriente I_0, se introduce en un campo magnético homogéneo con inducción B_0. Hállese la corriente que fluye por el anillo. La normal hacia el plano del anillo forma el ángulo α con la dirección de B_0; el radio del anillo es a.

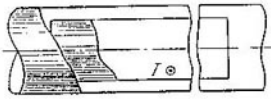
11.5.9*. En un campo magnético homogéneo permanente de inducción B se encuentra cierto anillo circular conductor con radio a. En el instante inicial el plano del anillo es paralelo al campo y la corriente en el anillo no circula. Determínese la corriente en el anillo después de girarlo de manera que el plano resultó estar perpendicularmente a las líneas magnéticas de fuerza. Calcúlese la inducción del campo en el centro del anillo y trácese la gráfica aproximada del cambio de la inducción del campo en uno de los diámetros. La inductancia del anillo es L.

11.5.10*. Una barra superconductora de sección σ y longitud l pasa a velocidad constante a través de una bobina con sección S y longitud h, confeccionada de un alambre superconductor. Trácese la gráfica de la dependencia entre la corriente en la bobina y la posición de la barra, si la bobina está cortocircuitada y la corriente inicial en ella es I_0. Examínense los casos: a) $l > h$; b) $l < h$. Menospréciense los efectos de borde.

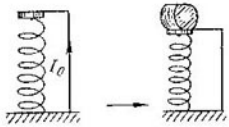
11.5.11*. Calcúlese la inductancia de un solenoide largo de radio r y longitud l, colocado en el eje de un tubo cilíndrico superconductor largo de radio R. La cantidad de espiras del solenoide es N.

11.5.12*. Una corriente I se deja pasar a través de un cable recto y largo que se encuentra a la altura h sobre un plano superconductor. ¿Cuál es la presión magnética máxima sobre la superficie del superconductor? ¿Con qué fuerza actúa el superconductor sobre la unidad de longitud del cable?

11.5.13*. Por un solenoide superconductor cortocircuitado fluye cierta corriente I_0. Determínese la altura estacionaria del solenoide y la corriente en él después de colocar una carga de masa m sobre el extremo superior del solenoide, si éste no se deforma en sentido radial, en tanto que al deformarse en sentido axial se comporta como



Para el problema 11.5.11*.

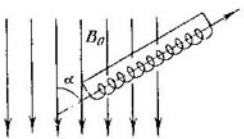


Para el problema 11.5.13*.

un muelle con rigidez k. La sección del solenoide es S y la altura inicial, h_0.

11.5.14*. Un solenoide largo cortocircuitado, hecho de un superconductor, se introduce en un campo magnético de inducción B_0 formando el ángulo α respecto a la dirección del campo. ¿De qué manera se distribuirá la inducción del campo magnético en el solenoide, si éste entra sólo hasta la mitad en el campo exterior?

11.5.15*. A lo largo del eje de un tubo circular superconductor largo de sección S a gran distancia se encuentra una bobina superconductora cortocircuitada con corriente I. La cantidad de espiras en



Para el problema 11.5.14*.

Para el problema 11.5.16*.

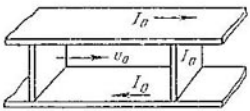
la bobina es N, la longitud de la bobina y su sección son l y σ. La masa de la bobina es m. ¿Qué velocidad es necesario comunicarle a la bobina para que pase a través del tubo fijo?

11.5.16*. ¿Qué velocidad mínima debe poseer una barra fina superconductora de sección S, longitud l y masa m, para poder irrumpir en un campo magnético longitudinal de inducción B?

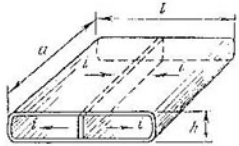
11.5.17*. Entre dos barras se mueve a velocidad constante v_0 un émbolo en dirección de un tabique de masa m. Todos ellos forman un circuito superconductor. Hállese la velocidad máxima del tabique, si en el instante inicial se encontraba en reposo, la corriente en el circuito era I_0 y la distancia entre el émbolo y el tabique era

x_0. La inductancia por unidad de longitud de las barras es L y no existe fricción.

11.5.18*. Una caja hecha de un superconductor se divide en dos partes iguales mediante un tabique superconductor de grosor d. Las dimensiones de la caja se dan en la figura ($h \ll a, l$). Por la caja perpendicularmente al tabique circula cierta corriente, cuya densidad lineal es i. ¿Con qué frecuencia oscilará el tabique, si le comunicamos



Para el problema 11.5.17*.



Para el problema 11.5.18*.

una pequeña velocidad a lo largo de la caja? La masa del tabique es m.

11.5.19*. Un anillo de cobre con radio a y masa m está colgado de un hilo, realizando pequeñas oscilaciones de torsión con el período T_0. La inductancia del anillo es L. ¿Cómo cambiará el período de las oscilaciones del anillo, si lo ubicamos en un campo magnético homogéneo horizontal de inducción B_0, paralelo al plano del anillo en posición de equilibrio? El momento de inercia para el anillo con respecto al eje que pasa por el diámetro, es J. Menospréciese la resistencia óhmica del anillo.

11.5.20*. En un campo magnético homogéneo de inducción B se hallan dos listones metálicos verticales, situados en un plano perpendicularmente a las líneas de fuerza del campo. Por los listones puede deslizarse sin fricción un conductor de longitud l y masa m. Descríbase el movimiento del conductor, si los extremos superiores de los listones se conectan mediante la inductancia L. La aceleración de la gravedad es g.

11.5.21*. Dentro de una envoltura cilíndrica conductora se crea un campo magnético. A la envoltura le comunican una velocidad v de manera que ella comienza a comprimirse hacia el eje, sin perder la simetría. Búsquese la inducción máxima del campo magnético que puede obtenerse por semejante procedimiento, si la inducción inicial $B_0 = 10$ T, $v = 3$ km/s, el radio inicial de la envoltura $R = 20$ cm, el grosor de la pared es de 0,5 cm y la densidad del material de la envoltura es de 8,9 g/cm^3. Hállese la presión magnética máxima que actúa sobre la envoltura. Menospréciese la resistencia eléctrica de la envoltura.

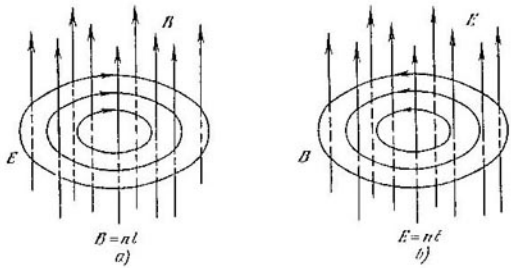
11.5.22*. Debido a la masa finita de los electrones, el campo magnético exterior de inducción B_0 se apantalla no en plena medida por un conductor ideal y penetra parcialmente en un tubo supercon-

ductor largo. El eje del tubo está dirigido a lo largo del campo magnético, el radio del tubo R es mucho mayor que el grosor de la pared del tubo h. La cantidad de electrones superconductores en unidad de volumen del material del tubo es n_e. Calcúlese la inducción de dicho campo para el caso $B_0 = 10$ T, $R = 1$ mm, $h = 0{,}1$ mm y $n_e = 10^{20}$ cm^{-3}.

11.5.23*. Si impulsamos hasta la velocidad angular ω un cilindro largo con conducción ideal de paredes finas alrededor de su eje, dentro del cilindro surge un campo magnético. Hállese su inducción.

§ 11.6. Enlace entre el campo eléctrico alterno y el magnético

11.6.1. Conforme a la ley de la inducción electromagnética, un campo magnético alterno origina un campo eléctrico rotacional. Lo mismo, un campo eléctrico alterno engendra un campo magnético rotacional, sólo que al variar el campo eléctrico, la dirección



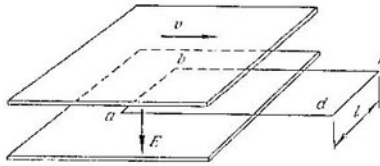
Para el problema 11.6.1.

del vector B forma un tornillo a derechas con la dirección del vector dE/dt. En tanto que el factor de proporcionalidad en CGS, que enlaza el valor absoluto de la circulación (del trabajo) por el contorno del vector de un campo con la velocidad de variación del flujo del vector a través de este contorno de otro campo, es en ambos fenómenos el mismo. Haciendo uso de esta propiedad del campo electromagnético, determínese en CGS y SI la dependencia entre la circulación del vector de inducción del campo magnético por el contorno y la velocidad de variación del flujo de intensidad para el campo eléctrico a través de dicho contorno.

11.6.2. a) Un condensador plano se mueve a velocidad v a lo largo de sus placas. La intensidad del campo eléctrico entre las placas es E. Determínese la velocidad de variación del flujo de intensidad para el campo eléctrico a través de un contorno rectan-

gular *abcd* y la circulación del vector de inducción para el campo magnético por dicho contorno. ¿Cómo se relacionan las magnitudes buscadas en el SI y en CGS?

b) Adúzcanse ejemplos que confirmen el carácter proporcional entre la circulación del vector de inducción para el campo magnético por el contorno y la velocidad de variación del flujo de inten-



Para el problema 11.6.2.

sidad para el campo eléctrico a través de la superficie limitada por el mencionado contorno.

11.6.3. ¿Cuál era el flujo de intensidad para el campo eléctrico a través de cierta área limitada por un contorno cerrado, si al reducirse uniformemente este flujo hasta cero en el transcurso de 1 μs en el contorno surgió una circulación del vector de inducción para el campo magnético de 0,001 T·m?

11.6.4*. Un campo magnético, al descargarse un condensador, se crea no sólo por la corriente en el conductor, sino que también por el campo eléctrico variable en el espacio entre las armaduras del condensador, con la particularidad de que el campo eléctrico variable crea un campo magnético similar al que aparecería si entre las armaduras existiese una corriente, igual a la corriente en el conductor. Demuéstrese eso.

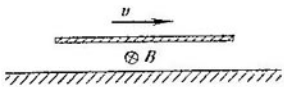
11.6.5. La intensidad de un campo eléctrico homogéneo dentro de un condensador plano con armaduras de radio de 10 cm crece linealmente con el tiempo: $E = \alpha t$, donde $\alpha = 9 \cdot 10^{10}$ V/(m·s). ¿Cuál será la inducción del campo magnético dentro del condensador a la distancia de 5 cm de su eje? Trácese la gráfica de la dependencia entre la inducción del campo magnético y la distancia hasta el eje en el plano central del condensador.

11.6.6. En un circuito oscilante se excitan oscilaciones libres. ¿En cuánto la inducción máxima del campo magnético dentro de un condensador plano es inferior a la inducción máxima del campo magnético en una bobina de inductancia? El radio de las placas del condensador es R; la longitud de la bobina, L y la cantidad de espiras, N.

11.6.7. Un condensador plano, la intensidad del campo eléctrico dentro del cual es E, se mueve a velocidad v. El vector velocidad for-

ma un ángulo α con el plano de las placas. ¿Cuál será la inducción del campo magnético dentro del condensador?

11.6.8. Al moverse una placa cargada uniformemente a velocidad v, surge un campo magnético de inducción B que es paralelo a la superficie del metal. Determínese la densidad superficial de la carga en la placa.



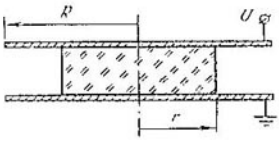
Para el problema 11.6.8.

11.6.9. a) Dentro de un condensador plano, paralelamente a sus armaduras, se mueve a velocidad v una lámina fabricada de cierto conductor, cuyo grosor es igual a la mitad de la distancia entre las armaduras del condensador. Entre las armaduras del condensador se mantiene una tensión U y la distancia entre ellas es h. ¿Cuál será la inducción del campo magnético dentro del conductor? ¿Entre el conductor en movimiento y las armaduras del condensador?

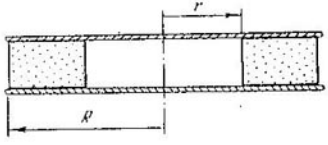
b*) ¿Cómo cambiará la inducción del campo magnético en la lámina en movimiento si el conductor en el problema a) se sustituye por un dieléctrico con constante dieléctrica ε?

11.6.10*. En un medio dieléctrico inmóvil con constante dieléctrica ε se mueve paralelamente a sus placas un condensador plano cargado. ¿En cuánto cambiará la inducción del campo magnético dentro del condensador, si el medio comienza a moverse junto con él?

11.6.11*. a) La intensidad del campo eléctrico dentro de un condensador plano circular, lleno de una substancia con constante



Para el problema 11.6.11*b.



Para el problema 11.6.12*.

dieléctrica ε, crece linealmente con el tiempo: $E = \alpha t$. Determínese la inducción del campo magnético dentro del condensador a la distancia r de su centro.

b) La tensión en las armaduras de un condensador plano crece linealmente con el tiempo: $U = \alpha t$. El radio de las armaduras es R y la distancia entre ellas, h. En el eje del condensador se instala un cilindro dieléctrico con radio r y constante dieléctrica ε. Determínese la inducción del campo magnético en la superficie lateral del cilindro y en el borde del condensador.

11.6.12*. Un condensador aislado plano, cuyas placas son círculos metálicos paralelos de radio R, está lleno de una substancia,

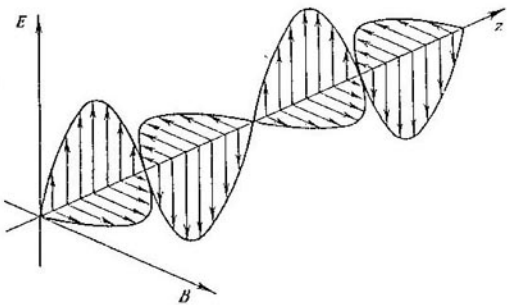
a excepción de la zona cilíndrica central de radio r. El condensador se descarga a través de esta substancia. La corriente de la descarga es I. Determínese la dependencia entre la inducción del campo magnético dentro del condensador y la distancia hasta el eje del condensador. Trácese la gráfica de dicha dependencia.

Capítulo 12

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 12.1. Propiedades, emisión y reflexión de las ondas electromagnéticas

12.1.1. En la figura viene la imagen de la «foto instantánea» de una onda electromagnética. Los vectores E y B en la onda son mutuamente perpendiculares y perpendiculares a la dirección de la propagación de la onda. Si hacemos girar un sacacorchos con rosca



Para el problema 12.1.1.

derecha en sentido desde el vector E hacia el vector B, el desplazamiento de traslación del sacacorchos coincidirá con el vector velocidad de la onda c. Haciendo uso de esta regla, determínese en qué dirección se propaga la onda mostrada en la figura.

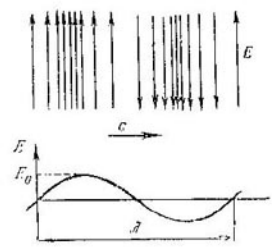
12.1.2. ¿Cómo cambiará la dirección de propagación para la onda electromagnética, si en la onda cambiamos la dirección por la contraria: a) del vector de inducción del campo magnético; b) del vector de inducción del campo magnético y del vector de intensidad del campo eléctrico?

12.1.3. En la figura viene ilustrado el campo eléctrico de una onda plana sinusoidal en el instante nulo. El sentido de la propagación de la onda se indica mediante una flecha. ¿Cómo depende la intensidad del campo eléctrico con respecto a z y t?

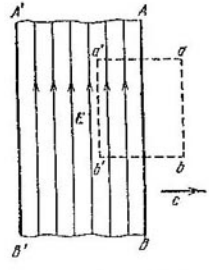
12.1.4. Dos ondas sinusoidales con la misma polarización $E_1 \operatorname{sen} [\omega (t - z/c) + \varphi_1]$ y $E_2 \operatorname{sen} [\omega (t - z/c) + \varphi_2]$ se superponen mutuamente. ¿Cuál será la amplitud de la intensidad para el campo eléctrico de la onda resultante? ¿Cuál será la fase de esta onda?

12.1.5. Dos ondas planas sinusoidales, cuyas amplitudes son iguales a E_0, tienen las frecuencias ω y $\omega + \Delta$ ($\Delta \ll \omega$) y se propagan en una misma dirección, superponiéndose una a la otra. ¿Qué amplitud máxima tendrá la onda resultante? Determínese la distribución de la densidad media de la energía en la onda resultante a lo largo de la dirección de propagación de las ondas.

12.1.6. a) La onda electromagnética ocupa el espacio entre dos planos ilimitados y paralelos AB y $A'B'$. La sección mostrada del



Para el problema 12.1.3.



Para el problema 12.1.6a.

campo electromagnético se mueve a velocidad de la luz c en sentido, perpendicular al plano AB. La intensidad del campo eléctrico de la onda es E. Aplicando la ley de la inducción electromagnética al contorno rectangular $a'b'ba$, determínese la inducción del campo magnético de la onda en SI y CGS.

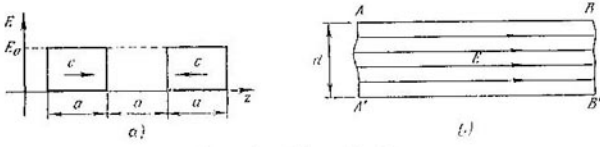
b*) Una onda sinusoidal se propaga en un medio con constante dieléctrica ε a velocidad $c/\sqrt{\varepsilon}$. La amplitud de la intensidad del campo eléctrico para la onda es E_0. Determínese la amplitud de la inducción para el campo magnético.

12.1.7. a) En la figura se muestran las intensidades del campo eléctrico para las ondas electromagnéticas planas que se desplazan una al encuentro de la otra en el instante nulo. Trácense las gráficas de distribución de E y B de los campos de estas ondas en los instantes $\frac{1}{2}\frac{a}{c}$, $\frac{3}{4}\frac{a}{c}$, $\frac{a}{c}$. ¿Cuál será la relación de la energía del campo

eléctrico y la energía del campo magnético con respecto a la energía total en estos instantes?

b) Un campo eléctrico homogéneo de intensidad E ocupa el espacio entre los planos AB y $A'B'$. La distancia entre los planos es d. Dicho campo se forma al superponerse dos ondas electromagnéticas planas. Determínense estas ondas.

c) ¿En qué ondas electromagnéticas se desintegra un campo magnético libre de inducción B, concentrado entre los planos AB y $A'B'$? El vector de inducción del campo magnético es paralelo a los planos.



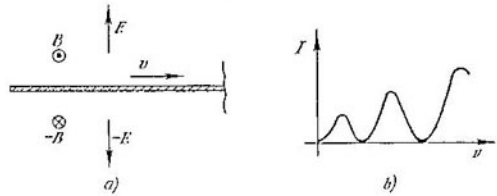
Para el problema 12.1.7.

12.1.8. a) Un cuerpo cargado en movimiento posee campo magnético, mientras que un cuerpo inmóvil no lo tiene. Por esta razón, al parar instantáneamente el cuerpo, el campo magnético se vuelve «sobrante», libre, descomponiéndose en ondas electromagnéticas. Así, pues, el proceso de emisión de ondas electromagnéticas puede examinarse como la desintegración de los campos «sobrantes» que surgen al variar la velocidad del cuerpo con carga. El mencionado proceso se describe con mayor sencillez al examinar la parada de un condensador plano. Si el condensador se movía a velocidad v a lo largo de sus placas, la inducción del campo magnético B en el condensador en movimiento está enlazada con la intensidad del campo eléctrico E mediante la relación $B = \frac{v}{c^2} E$. En caso de la parada instantánea la inducción B resulta ser «sobrante». Entonces este campo puede considerarse como la superposición de dos ondas electromagnéticas con inducción $B/2$ que se mueven en direcciones contrarias perpendicularmente a las placas, ya que la inducción sumaria del campo magnético para estas ondas es igual a B y la intensidad sumaria del campo eléctrico es nula. Determínese la intensidad del campo eléctrico en cada onda. H

b*) ¿Qué energía emite, al pararse instantáneamente, una carga Q, distribuida por una esfera de radio R? La velocidad de la esfera hasta su parada era v.

c) Entre dos cables, separados por un espacio de aire, elevaron la tensión hasta que entre ellos saltó una chispa. Después de ello surgieron oscilaciones electromagnéticas de la corriente que se convirtieron en fuente de ondas electromagnéticas. Estímese en cuánto aumentará la potencia de emisión para estas ondas, si la tensión disruptiva crece al doble?

12.1.9*. a) Un plano cargado con el campo eléctrico de intensidad $\pm E$, en movimiento a lo largo de su plano a velocidad v, crea un campo magnético de inducción $B = \pm \frac{v}{c^2} E$. Por eso, al disminuir la velocidad en dv en el espacio que rodea el plano aparece un



Para el problema 12.1.9*.

microcampo magnético «sobrante» que posee la inducción $dB = \pm \frac{dv}{c^2} E$. La desintegración de semejantes microcampos da una onda electromagnética, cuya intensidad del campo eléctrico depende solamente de la velocidad del plano:

$$E_{\text{rad}}(t,\ x) = cB_{\text{rad}}\ (t,\ x) = c\,\frac{v_{t-x/c}}{c^2}\,E = \frac{v_{t-x/c}}{c}\,E.$$

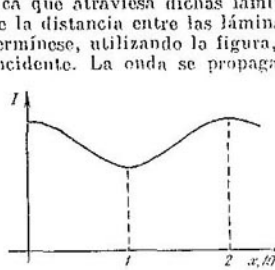
El índice $t - x/c$ significa que a la distancia x del plano el valor de la velocidad del plano debe tomarse en el instante $t - x/c$. Por ejemplo, la intensidad del campo eléctrico de la emisión de una placa, cuya velocidad es igual a $v_0 \operatorname{sen} \omega t$, a la distancia x de la placa en el instante t es $\frac{v_0}{c} \operatorname{sen} \omega\,(t - x/c)\,E$, ya que la velocidad de la placa en el instante $t - x/c$ era igual a $v_0 \operatorname{sen} \omega\,(t - x/c)$. Haciendo uso de la fórmula $E_{\text{rad}} = \frac{v_{t-x/c}}{c}\,E$, determínese la intensidad del campo eléctrico en una onda plana, emitida por un condensador plano en movimiento con la aceleración constante a, dirigido a lo largo de sus placas. La distancia entre las placas es d y la intensidad del campo eléctrico dentro del condensador es E.

b) A un condensador plano cargado lo balancean a lo largo de sus placas. Con el aumento de la frecuencia de las oscilaciones ν, la intensidad media de la emisión del condensador I primero crece, luego decrece hasta cero, después otra vez aumenta, etc., (véase la figura). ¿Cómo explicar semejante alternación de la intensidad de la emisión? ¿Para qué frecuencias el condensador no radia energía? Estímese la frecuencia para la que se observan los máximos primero y k-ésimo de la emisión.

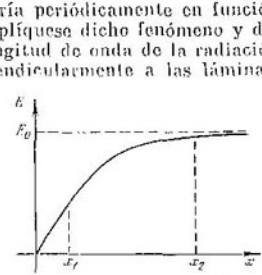
c) La densidad lineal de la corriente en un plano varía de modo sinusoidal con amplitud i_0. Determínese la amplitud de la intensidad del campo eléctrico en la onda que emite el plano.

d) Determínese el factor de reflexión de una onda electromagnética que incide perpendicularmente sobre una película conductora fina. El grosor de la película es Δ; la cantidad de electrones de conducción en unidad de volumen, n_e y la frecuencia de la onda, ν.

12.1.10. Si empezamos a separar dos láminas especulares semitransparentes y paralelas, la intensidad de la radiación electromagnética que atraviesa dichas láminas varía periódicamente en función de la distancia entre las láminas. Explíquese dicho fenómeno y determínese, utilizando la figura, la longitud de onda de la radiación incidente. La onda se propaga perpendicularmente a las láminas.



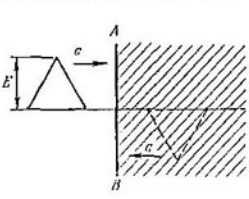
Para el problema 12.1.10.



Para el problema 12.1.11.

12.1.11. La amplitud de la intensidad del campo eléctrico para la onda electromagnética, reflejada de una película conductora, es tanto mayor, cuando más gruesa es la película. En la figura se da la dependencia típica entre la amplitud de la onda reflejada y el grosor de la película. En el instante inicial (hasta el punto x_1) la amplitud depende linealmente del grosor de la película x, luego la dependencia lineal se infringe y en la zona $x > x_2$ la amplitud de la onda reflejada difiere poco de la amplitud de la onda incidente E_0. Explíquese esta dependencia.

12.1.12. a) Estímese la profundidad de penetración de una onda electromagnética que incide perpendicularmente en un conductor. La frecuencia de la onda es ν y la cantidad de electrones de conducción en unidad de volumen es n_e.



Para el problema 12.1.13a.

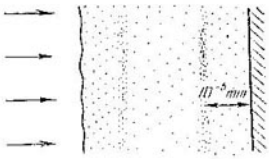
b) Resuélvase el problema a) en la zona visible ($\nu = 10^{15}$ Hz) para un metal con $n_e = 10^{22}$ cm^{-3}.

12.1.13. a) Para un número suficientemente grande de electrones de conducción por unidad de volumen del metal, la componente de la intensidad del campo eléctrico de la onda, que es paralela a la superficie del metal, se debilita prácticamente hasta cero. Por eso la solución del problema sobre la interacción de la onda electromagnética con el metal se reduce a la búsqueda en las inmediaciones de la

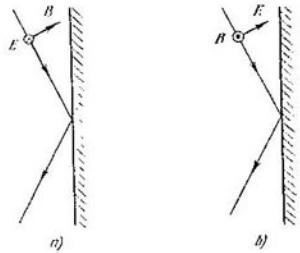
superficie de dos ondas progresivas tales que su superposición (adición) dé la componente nula de la intensidad del campo eléctrico a lo largo de la superficie. Semejantes ondas electromagnéticas, cuando éstas inciden perpendicularmente sobre una pared metálica, son dos, a saber: una de ellas se mueve realmente en el espacio fuera del metal y la otra, ficticia, la onda «volcada» se mueve al encuentro de la primera dentro del metal (en la figura esa zona junto con la onda ficticia se encuentra a la derecha del plano AB). La onda ficticia se convierte en real en cuanto supera el límite AB, donde se superpone sobre la primera onda. La superposición de dichas ondas a la izquierda del plano AB da la intensidad nula del campo eléctrico a lo largo de AB y, por lo tanto, resuelve el problema planteado. Haciendo uso del procedimiento descrito, hállense la intensidad y la inducción del campo electromagnético en la cercanía del plano AB en el instante en que el vértice de la onda incidente alcanza el plano.

b*) La amplitud de la intensidad del campo eléctrico para una onda sinusoidal plana es igual a E. ¿Qué presión media ejerce esa onda al incidir normalmente sobre cierta pared metálica plana?

12.1.14. Un soporte metálico con superficie lisa y brillante se cubre de una capa de fotoemulsión. Al incidir normalmente la luz,



Para el problema 12.1.14.



Para el problema 12.1.15.

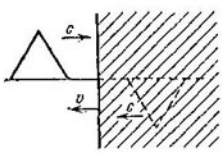
a la distancia de 10^{-6} mm de la superficie metálica tiene lugar el ennegrecimiento de la emulsión. Explíquese este efecto. Determínese la longitud de onda de la luz que incide sobre la superficie metálica? ¿A qué distancia se encontrará la segunda capa de ennegrecimiento?

12.1.15. Haciendo uso del método expuesto en el problema 12.1.13, demuéstrese que el ángulo de incidencia para la onda electromagnética es igual al ángulo de reflexión. Examíneuse los casos: a) el vector E de la onda electromagnética que incide sobre un metal es paralelo a la superficie metálica; b) el vector B de la onda electromagnética es paralelo a la superficie metálica.

12.1.16. La presión media de una onda sinusoidal plana, que incide bajo el ángulo α sobre una superficie metálica, es igual a P. Determínese la amplitud de la intensidad del campo eléctrico para esta onda.

12.1.17*. a) Estímese la dimensión máxima de las partículas de polvo de aluminio que en el espacio cósmico podrían alejarse del Sol bajo la influencia de los rayos solares.

b) ¿Qué presión ejercen los rayos solares sobre cierta superficie especular en la proximidad de la Tierra, cuando los rayos inciden sobre el espejo por la normal, así como cuando los rayos inciden formando el ángulo de 30°?



Para el problema 12.1.18*.

12.1.18*. El método de ondas ficticias (véase el problema 12.1.13) puede utilizarse también para resolver el problema sobre la reflexión de la onda electromagnética de una superficie metálica que se mueve a velocidad v. Para resolverlo es necesario elegir la onda ficticia de manera que, al pasar a la zona fuera del metal y hacerse «real» y sumarse con la onda incidente, dé en CGS una intensidad del campo eléctrico que sea v/c veces inferior a la inducción del campo magnético. Explíquese esta condición.

12.1.19*. Una onda electromagnética plana incide perpendicularmente sobre cierta pared metálica que se mueve a velocidad v. La intensidad del campo eléctrico de la onda es E. ¿Qué presión ejerce la onda sobre la pared?

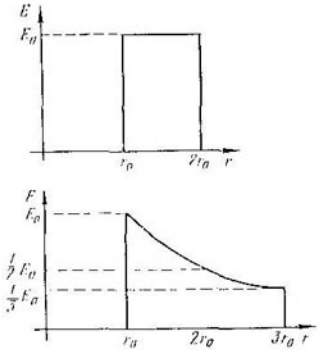
12.1.20. Al reflejarse una onda sinusoidal que incide perpendicularmente sobre una pared metálica en movimiento su frecuencia varía en Δ. La frecuencia inicial de la onda es ν_0. Determínese la velocidad de la pared.

12.1.21. ¿Por qué al pasar la onda electromagnética a través de la superficie de separación plana vacío—medio aislante: a) la componente normal de la intensidad del campo eléctrico disminuye ε veces, mientras que la paralela no cambia; b) la componente normal de la inducción del campo magnético no varía, mientras que la paralela aumenta μ veces? Aquí ε es la constante dieléctrica y μ, la permeabilidad magnética del medio.

12.1.22. ¿Cómo cambia la fase de la onda, reflejada de la superficie de separación plana entre dos dieléctricos con permitividades ε_1 y ε_2 en el caso $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ y en el caso $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$? La onda incide sobre el plano de la superficie de separación de modo perpendicular.

12.1.23. a) Muéstrese que en la onda esférica, emitida por una fuente puntual, las amplitudes de la intensidad del campo eléctrico y la inducción del campo magnético de la onda disminuyen inversamente proporcional a la distancia de la fuente, si la energía de la onda no es absorbida por el medio.

b) En la figura viene representada la distribución de los campos eléctricos para dos ondas esféricas progresivas en el instante nulo.



Para el problema 12.1.23b.

Muéstrese la distribución de los campos eléctricos en el instante r_0/c. ¿Cuál será la distribución de los campos eléctricos para $t \to \infty$? Determínense las energías de estos campos.

§ 12.2. Propagación de las ondas electromagnéticas

12.2.1. Conforme al principio de Huygens—Fresnel, cada sector del frente de onda es fuente de una onda esférica secundaria. La envolvente de estas ondas da un frente nuevo de onda. Muéstrese, utilizando dicho principio, que: a) el frente plano de una onda electromagnética se desplaza a la velocidad de la luz c en dirección perpendicular al plano del frente; b) el radio del frente esférico aumenta en $c\tau$ durante el tiempo τ.

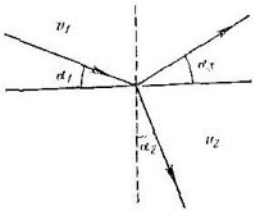
Para el problema 12.2.1.

12.2.2. ¿Cómo cambian la longitud y velocidad de la onda al pasar a un medio con índice de refracción n? ¿Varía o no la frecuencia de la onda?

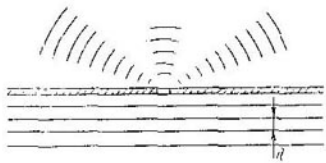
12.2.3. Haciendo uso de las ondas secundarias, demuéstrese que al incidir una onda plana sobre la superficie de separación de dos medios: a) el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión ($\alpha_1 = \alpha_3$); b) la relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es igual a la relación entre la velocidad

de la onda en el primer medio y la velocidad de onda en el segundo medio ($\operatorname{sen}\alpha_1/\operatorname{sen}\alpha_2 = v_1/v_2$).

12.2.4. Búsquense los ángulos que determinan la dirección de los mínimos de emisión, si la onda plana incide perpendicularmente sobre una ranura de anchura b. La longitud de la onda es $\lambda < b$.



Para el problema 12.2.3.

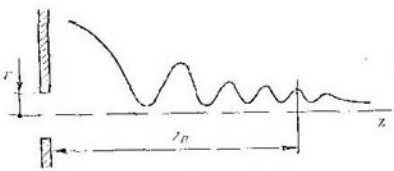


Para el problema 12.2.4.

12.2.5. La anchura de las rayas en la red de difracción es mucho menor que la longitud de onda. ¿En cuánto aumentará la intensidad de la radiación en sentido del máximo de ésta, si aumentamos la cantidad de rayas en la red de difracción k veces?

12.2.6. Sobre una red de difracción con 200 líneas por 1 mm incide de cierto haz muy estrecho de la radiación K_α de cobre ($\lambda = 1{,}541 \cdot 10^{-10}$ m) bajo el ángulo de 20°, respecto a su superficie. Determínese la diferencia de los ángulos de reflexión entre los haces de los órdenes primero y cero.

12.2.7. Sobre un orificio de radio r incide perpendicularmente una onda sinusoidal plana. La longitud de onda $\lambda \ll r$. La intensidad



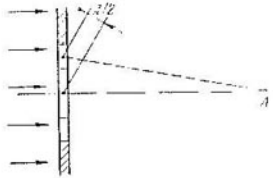
Para el problema 12.2.7

de la onda por el eje z varía periódicamente. ¿A qué distancia del centro del orificio se encuentra el último máximo? Determínese la distancia entre los máximos de la intensidad al alejarse en z_0 del centro del orificio, si $r^2/\lambda \gg z_0 \gg r$.

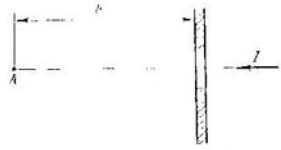
12.2.8. Si aumentamos un orificio redondo (por ejemplo, el diafragma iris) de manera que su tamaño en vez de una zona de Fresnel abarca dos zonas, entonces en el punto A la intensidad de

la radiación disminuye considerablemente, reduciéndose hasta cero, aunque el flujo de radiación a través del orificio crece casi al doble. ¿Cómo concuerdan estos dos hechos?

12.2.9*. Sobre una pantalla, que posee un orificio redondo, incide cierto haz paralelo de luz. El radio del orificio coincide con el radio de la zona central de Fresnel para el punto A (véase la figura



Para el problema 12.2.8.



Para el problema 12.2.10.

para el problema 12.2.8). Utilizando el método gráfico, determínese en cuánto la intensidad de la luz procedente de la zona central sería mayor que la intensidad de la luz que llegaría a este mismo punto al no haber pantalla.

12.2.10. Muéstrese en la gráfica la dependencia entre la intensidad de la luz en el punto A y el radio del orificio que tapa el flujo paralelo de radiación con longitud de onda λ. La distancia desde el punto A hasta el centro del orificio es b. La intensidad de radiación en el flujo es I_0.

12.2.11*. a) En la figura se muestra una lámina plana de vidrio. Con esta lámina recubrieron un flujo paralelo de luz monocromática

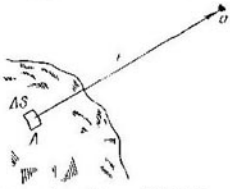
Para el problema 12.2.11*.

con longitud de onda λ. Resultó que las franjas circulares ennegrecidas de la lámina coincidieron con las zonas pares de Fresnel para el punto axial A. ¿Cómo cambió la intensidad de la luz en este punto?

b) Un flujo paralelo de luz monocromática se recubre mediante una lámina que difiere de la correspondiente al problema a) en que las secciones circulares ennegrecidas están cubiertas de una capa

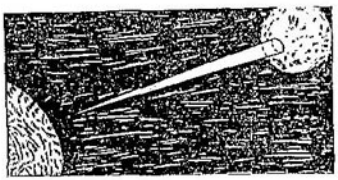
de dieléctrico que cambia la fase de la onda que llega en π. ¿Cómo cambió la intensidad de la luz en el punto A para este caso?

12.2.12*. Calcúlese la amplitud de la onda secundaria elemental de Huygens—Fresnel. (La amplitud a es proporcional a la amplitud A de la oscilación que llega del elemento ΔS, al área de dicho elemento e inversamente proporcional a r, es decir, $a = c_1 A \Delta S/r$. Para determinar c_1 compárese la amplitud de la onda plana en cualquier punto y la amplitud, calculada por el método de Fresnel, para este mismo punto, cuando como superficie auxiliar se toma el frente de la onda plana.)



Para el problema 12.2.12*.

12.2.13. a) Estímese el tamaño de la mancha luminosa en la Luna que dejará un rayo de láser. El láser se encuentra en la Tierra. El radio del rayo de láser es de 10 cm y la longitud de onda, 10^{-5} cm. (El límite de la mancha se estima partiendo de la condición de que


Para el problema 12.2.13a.

en la zona de la mancha los rayos, provenientes de los sectores individuales del frente de la onda, no se atenúan mutuamente.)

b) Estímense las dimensiones de la antena de un radar que emite ondas electromagnéticas de longitud de tres centímetros dentro de un ángulo de 0,01 rad.

12.2.14. Estímese la dimensión máxima del objeto en la superficie de la Tierra que puede fotografiarse de un satélite que vuela a la altura de 200 km, así como la dimensión mínima de los objetos en la Luna y Marte que pueden fotografiarse desde la órbita circunterrestre. El poder de resolución para la película fotográfica no restringe la precisión de la imagen.

12.2.15. a) El filamento incandescente de una bombilla tiene un matiz rojo, si se observa a través de la superficie opaca del globo. Explíquese ese fenómeno.

b) ¿Por qué la luz roja se disipa menos por la niebla?

c) ¿Por qué el cielo es azul?

Capítulo 13

ÓPTICA GEOMÉTRICA

§ 13.1. Propagación rectilínea y reflexión de la luz

13.1.1. Determínese la zona de la sombra total (umbra) de un lápiz redondo, si de fuente luminosa sirve una lámpara cilíndrica de descarga luminiscente. El lápiz y la lámpara están situados paralelamente.

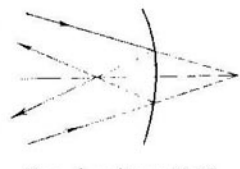
13.1.2. Una bombilla opaca en forma de esfera con diámetro de 6 cm ilumina un globo con diámetro de 26 cm. Determínense los diámetros de la umbra y de la penumbra del globo en la pared. El globo dista de la lámpara 1 m y de la pared 2 m.

13.1.3. «La habitación en la que entró Ivan Ivánovich, estaba totalmente oscura, puesto que los postigos estaban cerrados y el rayo solar, pasando por un agujero, hecho en el postigo, ... al chocar con la pared contraria, dibujaba en ella un paisaje abigarrado de ... tejados, árboles y vestidos colgados en el patio, verdad es que en forma invertida» (*N.V.Gógol*. La pelea de los dos Iván). Explíquese ese fenómeno.

13.1.4. En las cortinas que hacen sombrío en la habitación, apareció un orificio pequeño. Atravesando éste penetra un rayo solar y en la pared se extiende una manchita luminosa (spot) redonda. ¿Por qué la forma de esta manchita no depende de la forma del orificio (triangular, cuadrado)? ¿En qué caso aparece la dependencia entre las formas de la mancha y del orificio? (El mismo efecto puede observarse con ayuda de un pequeño espejo.)

13.1.5. Al reflejarse en un espejo plano, los objetos parecen estar vueltos de derecha a izquierda. ¿Por qué el espejo no «vuelca» la imagen de arriba hacia abajo?

13.1.6. Para obtener una imagen correcta es necesario formar de dos espejos un ángulo diedro con el ángulo en el vértice de 90°. En semejante espejo uno se puede ver desde cualquier punto de la habitación: Explíquese por qué.



Para el problema 13.1.8.

13.1.7. Determínese la distancia focal de un espejo esférico con radio R.

13.1.8. Un haz cónico convergente de rayos luminosos incide sobre un espejo cóncavo. ¿A qué distancia del foco se intersecan los rayos reflejados, si el radio del espejo es de 80 cm y la continuación de los rayos corta el eje óptico principal a la distancia de 40 cm detrás del espejo?

13.1.9. Un objeto se encuentra en el eje óptico principal de un espejo cóncavo distando 60 cm del polo del espejo. Determínese la

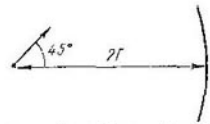
distancia focal del espejo, si la imagen del objeto es real y resulta aumentada 1,5 de veces.

13.1.10. La imagen de un objeto en un espejo cóncavo aparece aumentada en 3 veces. Después de que el objeto fue alejado del espejo a 80 cm, su imagen se hizo 2 veces menor que el objeto. Hállese la distancia focal del espejo.

13.1.11. Trácese la imagen del cuadrado con el lado f. El lado frontal del cuadrado dista f del polo de un espejo esférico. La distancia focal del espejo cóncavo es f.

13.1.12. Constrúyase la imagen de una flecha de longitud $f/2$, cuyo inicio se encuentra en el punto $2f$. La flecha está inclinada bajo un

Para el problema 13.1.11.



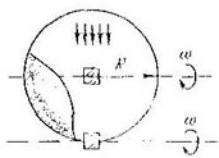
Para el problema 13.1.12.

ángulo de 45° hacia el eje óptico del espejo esférico con radio $2f$.

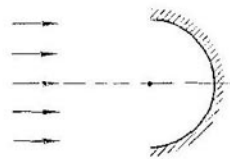
13.1.13. Muéstrese que si las distancias desde el objeto y la imagen hasta el foco de un espejo cóncavo son iguales a l_1 y l_2 resulta que $l_1 l_2 = f^2$.

13.1.14*. ¿Qué forma debe tener una superficie reflectora para que reúna todos los rayos paralelos en un punto?

13.1.15. Un pequeño espejo plano gira a la velocidad angular constante ω. ¿Con qué velocidad se desplazará el punto luminoso



Para el problema 13.1.15



Para el problema 13.1.16*.

que refleja el espejo por una pantalla esférica de radio R, si el espejo gira: a) alrededor del diámetro de la pantalla; b*) alrededor de la tangente? El rayo de luz que incide sobre el espejo, es perpendicular al eje de rotación.

13.1.16*. Un espejo semicilíndrico se coloca en un haz ancho de luz que va paralelamente al plano de simetría del espejo. El límite del haz coincide con el plano de simetría del espejo. Hállese el ángulo máximo entre los rayos en el haz reflejado del espejo (el ángulo de divergencia).

§ 13.2. Refracción de la luz. Lentes ópticas

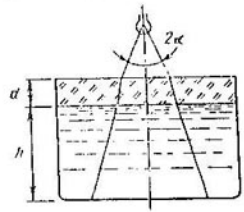
13.2.1. El pez ve el Sol bajo un ángulo de 60° con respecto a la superficie del agua. ¿Cuál es la altura real del Sol sobre el horizonte? El índice de refracción del agua $n = 1{,}33$.

13.2.2*. a) La profundidad aparente de un depósito de agua es de 2 m. ¿Cuál es la profundidad verdadera del depósito?

b) Desde un submarino en estado sumergido determinan la velocidad de un avión que vuela sobre el primero. ¿Se diferencia la velocidad aparente de la verdadera?

13.2.3. ¿Qué sucederá con la imagen de una fuente puntual en un espejo plano, si entre la fuente y el espejo se coloca paralelamente al espejo una placa de vidrio con grosor h e índice de refracción n?

13.2.4. Sobre un acuario de profundidad h, cubierto con un cristal grueso (su espesor es d y el índice de refracción, n_a), está suspendida una fuente luminosa. La luz incide sobre el cristal en forma de un cono con una abertura de 2α. El acuario hasta el cristal está lleno de agua, cuyo índice de refracción es n. ¿En cuánto cambiará el radio de la mancha luminosa en el fondo, si quitamos el cristal y vaciamos el acuario?

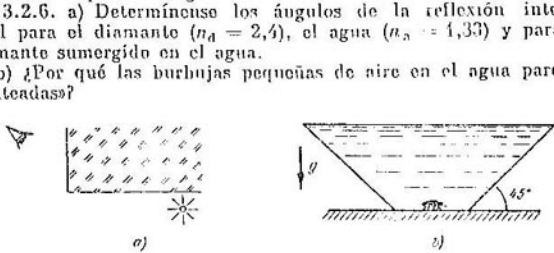


Para el problema 13.2.4.

13.2.5. El índice de refracción en la superficie de separación aire—vidrio es 1,5 y el índice de refracción en la superficie de separación aire—agua es 1,33. ¿Cuál es el índice de refracción en la superficie de separación agua—vidrio?

13.2.6. a) Determínense los ángulos de la reflexión interna total para el diamante ($n_d = 2{,}4$), el agua ($n_a = 1{,}33$) y para el diamante sumergido en el agua.

b) ¿Por qué las burbujas pequeñas de aire en el agua parecen «plateadas»?

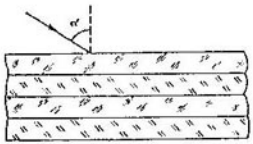


Para el problema 13.2.7.

13.2.7. a) ¿Se puede ver algo a través de dos caras adyacentes de un cubo de vidrio, si el índice de refracción del vidrio es 1,5?

b) El ángulo entre las paredes y el fondo del recipiente trapezoidal de vidrio es de 45°. El recipiente está lleno de agua. ¿Se verá el escarabajo en el fondo de dicho recipiente a través de sus paredes laterales?

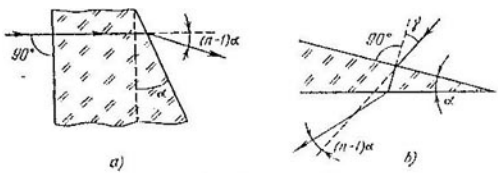
13.2.8. ¿Qué ángulo mínimo de incidencia deberá tener un rayo luminoso que incide sobre una pila de láminas transparentes planas, el índice de refracción de cada una de las cuales es k veces menor que el de la superior, para que el rayo no atraviese la pila? El índice de refracción de la lámina superior $n > 1$, la cantidad de láminas es N.



Para el problema 13.2.8.

13.2.9. a) A través de una cuña con un pequeño ángulo α en el vértice pasa un rayo luminoso, perpendicular a la cara delantera de la cuña. Demuéstrese que el ángulo de desviación del rayo con respecto a la dirección inicial es aproximadamente igual a $(n - 1)\,\alpha$. El índice de refracción de la cuña es n.

b) A través de una cuña con pequeño ángulo α en el vértice pasa un rayo luminoso que incide bajo un ángulo pequeño γ con respecto a la superficie anterior de la cuña. Demuéstrese que el ángulo de desviación es aproximadamente igual a $(n - 1)\,\alpha$. El índice de refracción de la cuña es n.



Para el problema 13.2.9.

c*) Dedúzcase la fórmula para la distancia focal de la lente fina. Los radios de curvatura de las superficies de la lente son R_1 y R_2, el índice de refracción del material de la lente es n.

13.2.10. a) Hállese la distancia focal de una lente biconvexa con radios de curvatura de 30 cm, confeccionada de un vidrio con índice de refracción 1,6. ¿Cuál es el poder óptico de dicha lente en dioptrías?

b) Una superficie de la lente es plana y la otra, esférica. El poder óptico de la lente es 1 dioptría. La lente está fabricada de vidrio con índice de refracción 1,6. Determínese el radio de curvatura de la superficie esférica de la lente.

13.2.11. Una lente biconvexa con los mismos radios de curvatura en ambas superficies está confeccionada de un vidrio con índice de refracción 1,61. El poder óptico de la lente en el agua es de 1,6 dioptrías. Hállense los radios de curvatura de las superficies de las lentes.

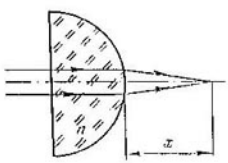
13.2.12. Una lámina plano-paralela está formada por dos cuñas de vidrio con un ángulo pequeño α. Los índices de refracción de las cuñas son n_1 y n_2. Sobre la lámina incide normalmente a la superficie un haz luminoso paralelo. Detrás de la lámina se pone una lente convergente con distancia focal f. En el plano focal de la lente se encuentra una pantalla. ¿En cuánto se desplazará punto luminoso en la pantalla si retiramos la lámina?

13.2.13*. En la superficie plana de un semicilindro de vidrio inciden bajo el ángulo de 45° rayos luminosos, yacentes en el plano perpendicular al eje del semicilindro. El índice de refracción del vidrio es n. ¿De qué parte de la superficie lateral del semicilindro saldrán los rayos luminosos?

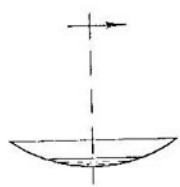
13.2.14*. Un haz luminoso fino, que atraviesa el centro de una esfera de vidrio, se enfoca a una distancia de su centro que es igual al diámetro de aquélla. Determínese el índice de refracción del vidrio.

13.2.15. Sobre un matraz esférico fino, introducido en un líquido, incide un haz luminoso paralelo de manera que el eje de éste pasa por el centro de aquél. En el lado opuesto del matraz el haz posee un diámetro dos veces mayor que el diámetro del haz luminoso que incide sobre el matraz. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido en que está sumergido el matraz?

13.2.16. Un haz luminoso estrecho, después de pasar por una semiesfera de vidrio con índice de refracción n, se reúne a una distancia x de la superficie convexa. ¿A qué distancia de la superficie plana se reunirán los rayos, si el haz se deja pasar por el lado contrario?



Para el problema 13.2.16.



Para el problema 13.2.18*.

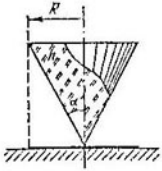
13.2.17*. Si miramos de costado un tubo capilar de vidrio, el radio interno visible será igual a r. ¿Cuál será el radio interno verdadero? El índice de refracción del vidrio es n.

13.2.18*. En un espejo esférico cóncavo de radio R virtieron una capa fina de un líquido desconocido. Resultó que el sistema óptico dado para cierta posición de la fuente da dos imágenes reales,

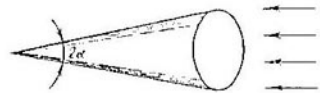
una de las cuales coincide con la propia fuente y la otra se encuentra a la distancia l de ella. Hállese el índice de refracción del líquido.

13.2.19*. El índice de refracción de la atmósfera de cierto planeta para $h \ll n/\alpha$ disminuye con la altura h sobre su superficie según la ley $n = n_0 - \alpha h$. El radio del planeta es R. Hállese a qué altura sobre la superficie del planeta el rayo, emitido horizontalmente, recorrerá el planeta, permaneciendo a la misma altura.

13.2.20. En un plano horizontal se ennegrece un círculo de radio R. En el centro del círculo se encuentra verticalmente, apoyándose con el vértice sobre el centro del círculo, un cono de vidrio. El ángulo de abertura del cono es $2\alpha = 60°$; el radio de la base, R; el índice



Para el problema 13.2.20.



Para el problema 13.2.21.

de refracción del vidrio $n > 1{,}5$. El círculo se observa de una distancia grande a lo largo del eje del cono. ¿Cuál será el radio visible del círculo?

13.2.21. Un cono con ángulo en el vértice 2α está fabricado de plexiglás (vidrio orgánico). Un haz luminoso paralelo incide sobre la base del cono. Descríbase el comportamiento de la luz. El índice de refracción de plexiglás es 1,5.

13.2.22. En una guía de luz (guiaondas) de fibras vítreas los tramos de entrada y salida de las fibras están situados de la misma manera en sus planos de entrada y salida. El índice de refracción del vidrio es n. Por la guía de luz se transmite la imagen de un círculo con radio r. ¿Qué dependencia existe entre el tamaño de la imagen en la salida y la distancia desde el plano del círculo hasta el plano de entrada de la guía de luz, si el radio del círculo es mucho mayor que el radio de dicha guía?

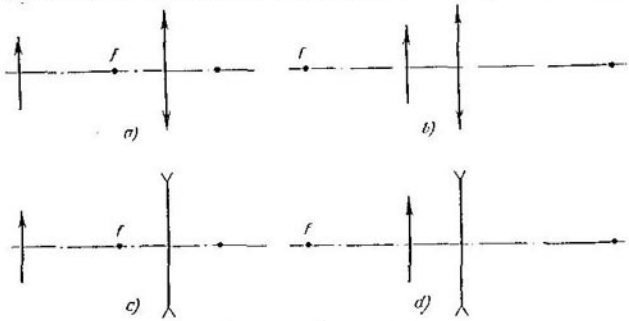
§ 13.3. Sistemas ópticos

13.3.1. En la figura se muestran las posiciones de ciertos objetos y los focos de las lentes. Trácense las imágenes de dichos objetos. ¿Cuál es el aumento en cada uno de los casos?

13.3.2. La fuente luminosa dista 90 cm de la pantalla. Una lente convergente fina, situada entre la pantalla y la fuente, da una imagen nítida de la fuente en la pantalla en dos posiciones. Determínese

la distancia focal de la lente, si la distancia entre las posiciones de la lente que dan la imagen nítida es de 30 cm.

13.3.3. a) ¿Qué gafas le recomendará a una persona miope que puede leer un texto situado a una distancia no mayor de 20 cm?



Para el problema 13.3.1.

¿Y qué gafas le propondrá a una persona présbita (hipermétrope) que puede leer un texto que dista no menos de 50 cm?

b) ¿Es miope o présbita la persona que ve bien en el agua?

13.3.4. ¿A qué distancia de la lente se encuentra cierto objeto, si la distancia entre éste y su imagen real es la mínima? La distancia focal de la lente es f.

13.3.5. La imagen de cierto objeto en el cristal mate de una cámara fotográfica desde la distancia de 15 m resultó tener una altura de 30 mm, mientras que desde la distancia de 9 m, una altura de 51 mm. Hállese la distancia focal del objetivo.

13.3.6. Se fotografía el instante de inmersión en el agua. La altura del trampolín es de 5 m, el fotógrafo dista 10 m del saltador. El objetivo de la cámara posee una distancia focal de 10 cm. ¿Durante cuánto tiempo puede estar abierto el obturador de la cámara fotográfica al fotografiar el salto al agua desde el trampolín? En el negativo se admite el difuminado de la imagen de 0,5 mm

Para el problema 13.3.7.

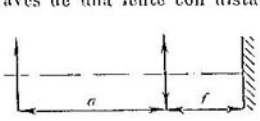
13.3.7. Al fotografiar un objeto muy alejado ante el objetivo de la cámara fotográfica a una distancia, igual a tres distancias focales, se coloca una regla fina de anchura D. El plano de la regla es perpendicular al eje óptico. El objetivo es una lente fina de diá-

metro $d < D$. Determínese la anchura de la sombra en la película (la anchura de la zona en la que la regla sombreará todos los rayos que vienen del objeto a fotografiar).

13.3.8. Al fotografiar la Luna desde la Tierra, usando una lente con distancia focal f, se obtiene una imagen confusa (borrosa) en forma de un disco con radio r_1. La imagen nítida de la Luna tendría el radio r_2. Determínese a qué distancia es necesario desplazar la placa fotográfica para que la imagen sea nítida. El diámetro de la lente es D. Considérese como zona de la imagen la zona de incidencia de la luz sobre la placa fotográfica.

13.3.9. Un objeto en forma de un segmento de longitud l se encuentra a lo largo del eje óptico de una lente convergente con distancia focal f. El punto central del segmento dista a de la lente y ésta da una imagen real de todos los puntos del objeto. Determínese el aumento longitudinal del objeto. ¿Cuál será el aumento del objeto cuando la dimensión l de éste sea mucho menor que f?

13.3.10*. La punta de un cono con el ángulo 2α se examina a través de una lente con distancia focal f, situada a la distancia a del vértice del cono ($a < f$). ¿Qué ángulo del cono se ve mediante la lente, si el eje de la lente pasa por el eje de simetría del cono?



Para el problema 13.3.11a.

13.3.11. a) A la distancia focal f de la lente se encuentra un espejo plano. Hállese a qué distancia de la lente se encuentra la imagen del objeto que dista a de la lente.

b) El lado plano de una lente planoconvexa, cuya distancia focal era f, se platea. Hállese la distancia focal del espejo obtenido.

13.3.12. Las distancias focales de dos lentes convergentes finas son iguales a f_1 y f_2. ¿Qué distancia focal tendrá el sistema compuesto por estas dos lentes? ¿Cuál será el poder óptico de dicho sistema? ¿Qué distancia focal tendrá el sistema, si la segunda lente es divergente?

13.3.13. Dos lentes finas planoconvexas, cuyas distancias focales en el aire son f, se arman en una montura de manera que las superficies convexas contacten. Determínese la distancia focal de semejante sistema en un líquido con índice de refracción n. Considérese que el líquido no penetra dentro de la montura. ¿Cómo cambiará la respuesta, si el líquido va a parar entre las lentes? El índice de refracción del vidrio, del que están hechas las lentes, es n_0.

13.3.14. Constrúyase la imagen del objeto que da: a) un sistema de una lente convergente con $f_1 = 1{,}5a$ y otra divergente con $f_2 = 1{,}5a$, donde a es la distancia entre las lentes; b) un sistema de dos lentes convergentes con $f_1 = 1{,}5a$ y $f_2 = 0{,}5a$. Indíquese la posición de los focos de los sistemas. El objeto dista $10a$ de la primera lente.

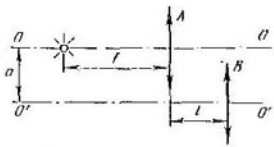
13.3.15. Se da un sistema de dos lentes con un eje óptico común.

Las lentes distan l entre sí y las distancias focales de aquéllas son f_1 y f_2. Es necesario encontrar una lente que dé la imagen de un objeto, situado fuera de las lentes, equivalente a la imagen del objeto que ofrece el sistema. ¿Cuál será su distancia focal?

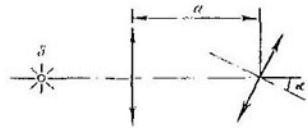
13.3.16. Dos lentes con distancias focales de 30 cm distan una de la otra 15 cm. Hállese para qué posiciones de un objeto el sistema da la imagen real?

13.3.17. Una lente divergente con distancia focal de 0,6 m se sitúa de manera que uno de sus focos coincide con el polo de un espejo cóncavo. ¿Cuál es la distancia focal del espejo, si se sabe que el sistema da una imagen virtual del objeto, ubicado a cualquier distancia delante de la lente? La imagen se crea por los rayos que pasan por segunda vez a través de la lente después de reflejarse del espejo.

13.3.18. Dos lentes convergentes A y B con las mismas distancias focales f distan l la una de la otra. El eje óptico OO de la lente



Para el problema 13.3.18.



Para el problema 13.3.19.

A es paralelo al eje óptico $O'O'$ de la lente B y dista a del eje $O'O'$. Búsquese la distancia entre la imagen y la fuente luminosa que está en el eje OO distando f de la lente A.

13.3.19. En el eje óptico de la lente convergente a distancia, igual a la focal, se sitúa una fuente puntual luminosa S. Por la otra parte de la lente en este mismo eje, distando a de su centro, se encuentra el centro de otra lente idéntica, cuyo eje forma el ángulo α con el eje de la primera lente. Hállese la distancia entre la fuente luminosa y su imagen en el par de lentes.

§ 13.4. Fotometría

13.4.1. Conforme a las normas de iluminación del puesto de trabajo de un obrero metalúrgico, destinado a operaciones finas, el alumbrado debe ser de 100 lx. ¿A qué altura del puesto de trabajo debe colocarse una lámpara, cuya intensidad luminosa es de 100 cd? ¿Cuál es la potencia de esta lámpara (en vatios), si solamente la décima parte de la energía de la corriente eléctrica se transforma en energía luminosa?

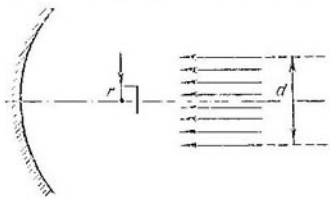
13.4.2. ¿En cuánto es necesario variar el tiempo de exposición, si aumentamos la distancia entre el papel fotográfico y la fuente luminosa tres veces?

13.4.3. La iluminación de una superficie plana en el punto más próximo a la fuente puntual es de 200 lx. ¿Cuál será la iluminación en los puntos en que el ángulo de incidencia es de 30°, 45° y 60°?

13.4.4. A la altura de 2 m sobre cierta superficie se encuentra una fuente puntual, cuya intensidad luminosa es de 120 cd. A la distancia de 1 m de la fuente se encuentra perpendicularmente a la superficie un espejo plano absolutamente reflector. Determínese la iluminación de la superficie debajo de la fuente.

13.4.5*. Entre un láser y el fotodetector se coloca una lámina gruesa de vidrio. Las indicaciones del fotodetector disminuyen. Cuando en vez del láser pusieron una lámpara de incandescencia (una bombilla) las indicaciones del fotodetector crecieron. Explíquense estos efectos.

13.4.6*. ¿Qué parte del flujo luminoso de un haz lumínico paralelo será absorbido por un círculo negro de radio r, cuyo centro coincide con el foco del espejo esférico con radio R? El círculo se halla perpendicularmente al eje óptico. El diámetro del haz $d > 2R$.



Para el problema 13.4.6*.

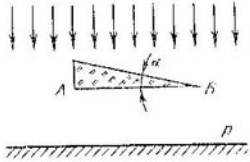
13.4.7. En el foco de un espejo esférico se coloca un recipiente con 100 g de agua. ¿Cuál debe ser el diámetro del espejo para que el agua hierva dentro de 1 min, si dirigimos el espejo directamente hacia el Sol? La densidad del flujo energético del Sol es de 0,14 W/cm². Menospréciense las pérdidas.

13.4.8*. ¿Es posible, reuniendo los rayos solares en el foco de un espejo esférico, obtener una iluminación mayor que el brillo de la superficie del Sol? ¿Qué iluminación máxima puede obtenerse en el foco de un espejo, si el área y el radio de curvatura del espejo son S y R, respectivamente? El brillo de la superficie del Sol es I_0.

13.4.9. Una pantalla se ilumina con un haz paralelo de luz. ¿Cómo cambiará la iluminación de la pantalla, si en la trayectoria de los rayos se pone un prisma con ángulo α y lado AB, paralelo a la pantalla? Trácese la gráfica de la variación de la iluminación a lo largo de la pantalla. Menospréciese la reflexión de la luz en el prisma.

13.4.10. ¿A qué consecuencias conduce la irisación (diafragmación) del objetivo en la cámara fotográfica?

13.4.11*. A un escarabajo lo fotografían en dos escalas, acercándo la cámara a una distancia, primero igual a la distancia focal triple del objetivo y luego a la distancia quíntupla ¿De qué manera es necesario cambiar el diámetro del diafragma del objetivo para que la iluminación de la imagen en la película sea en ambos casos



Para el problema 13.4.9.

Para el problema 13.4.12.

igual? El diámetro del diafragma en dichos casos es mucho menor que la distancia hasta el escarabajo.

13.4.12. ¿Qué pasará con la imagen que ofrece una lente, si pintamos la mitad superior de la lente con pintura negra?

13.4.13. En la tapa de un cajón cerrado de 1 m de altura hay un orificio redondo. ¿Cambiará la iluminación del fondo debajo del orificio, si en éste se instala una lente, cuyo poder óptico es igual a 1 dioptría? El cajón se encuentra a la intemperie con el cielo cubierto de una capa uniforme de nubes

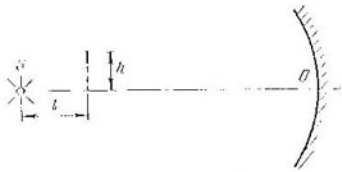
13.4.14. Una fuente puntual se encuentra a una altura h sobre una superficie horizontal. Un espejo plano se halla sobre la fuente, paralelamente a la superficie. Trácese la gráfica de la dependencia de la iluminación debajo de la fuente respecto a la distancia entre el espejo y la fuente.

13.4.15. ¿En cuánto la iluminación en una noche de luna llena es menor que en un día de sol? La altura de la Luna y el Sol sobre el horizonte es la misma. Considérese que la Luna disipa toda la luz que incide sobre ella, uniformemente por todo el hemisferio. Adóptese la distancia entre la Luna y la Tierra igual a 400 000 km y el radio de la Luna, de 2000 km.

13.4.16. Delante de un espejo esférico con radio R, en cuyo foco se encuentra una fuente luminosa puntual S, se coloca a la altura h sobre el eje del espejo SO una lámina pequeña, cuyo plano es perpendicular al eje. Hállese la relación de las iluminaciones de los lados derecho e izquierdo de la lámina, si $h \ll R$.

13.4.17. Un haz luminoso de intensidad I incide sobre una lámina plana y paralela en dirección de la normal a su superficie. Menospreciando la absorción y considerando que el factor de reflexión de la luz en cada superficie hacia cualquier dirección es igual a k, determínese la intensidad del haz que atraviesa la lámina.

13.4.18*. La imagen del Sol se obtiene mediante un objetivo que consta de dos lentes, una convergente y la otra divergente ($f_1 = 10$ cm, $f_2 = -10$ cm) separadas a 5 cm. En medio de las lentes se ubica un diafragma circular con diámetro de 0,5 cm. Suponiendo que las lentes poseen dimensiones suficientemente grandes, determínese en cuánto la iluminación de la imagen supera la correspon-



Para el problema 13.4.16.

diente a una pantalla iluminada por los rayos solares directos. El diámetro angular del Sol tómese igual a 0,01 rad.

13.4.19. Una fuente puntual con ayuda de un telescopio con objetivo de diámetro D_0 puede advertirse a la distancia L_0. ¿A qué distancia puede verse esta misma fuente mediante un telescopio con objetivo de diámetro D?

13.4.20. ¿Cómo cambia la iluminación de la imagen del Sol que da una lente planoconvexa, si cortamos ésta por el diámetro y la juntamos por los lados planos?

13.4.21. ¿Por qué al observar, recurriendo a un telescopio, las estrellas brillantes, éstas se ven incluso de día?

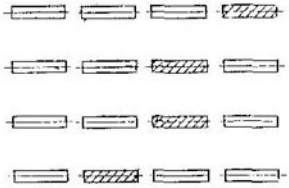
13.4.22*. La intensidad de la luz de un faro a la distancia L disminuye en un 10 por 100 a causa de la niebla. El radio de las gotas de la niebla es r. Estímese la cantidad de gotas de la niebla por unidad de volumen de aire.

13.4.23*. En una cortina de humo, formada por partículas no transparentes de radio de 5 μm, siendo el contenido en masa de la substancia de 0,04 g por 1 m³ de aire, la visibilidad es de 50 m. ¿Qué masa de substancia en 1 m³ de aire se dispersa por la fuente de la cortina de humo que crea partículas de radio de 10 μm, si la visibilidad se reduce hasta 20 m?

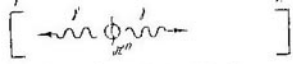
13.4.24. En un sistema de enlace óptico el rayo emisor del láser tiene forma de un cono con ángulo del vértice de 10^{-3} rad (el ángulo de divergencia). En el dispositivo receptor la energía luminosa se enfoca en un fotoelemento con ayuda de cierta lente con diámetro de 1 m. Resulta que, al variar la distancia entre el emisor y receptor desde 5 hasta 10 km, la señal en la salida del fotoelemento disminuye 2 veces (a causa de la absorción en la atmósfera). ¿En cuánto cambiará la señal al aumentar la distancia desde 10 hasta 20 km?

§ 13.5. Naturaleza cuántica de la luz

13.5.1. En la figura se muestran descargadores cilíndricos de alambre. Las partículas de luz de gran energía (rayos gamma), al atravesar los descargadores, encienden en ellos una descarga. En la figura los descargadores que se «encendieron» mediante los rayos gamma están sombreados. La longitud de los descargadores es de 5 cm. La distancia entre las filas de descargadores es de 6 cm y entre los extremos de los descargadores vecinos, de 1 cm. ¿Con qué precisión puede determinarse la dirección del movimiento del rayo gamma?



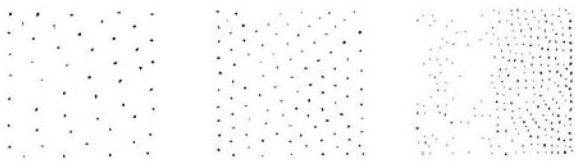
Para el problema 13.5.1



Para el problema 13.5.2.

13.5.2. Entre dos fotodetectores, que distan uno del otro 5 m, tuvo lugar la desintegración del mesón π^0 en dos rayos gamma. El primer detector registró un rayo gamma al cabo de 10^{-8} s después de ponerse en acción el segundo detector. ¿A qué distancia del primer detector se encontraba el mesón π^0?

13.5.3. La sensibilidad de la lámina fotográfica era tan elevada que cada fotón originaba en ella la aparición de una mancha negra.

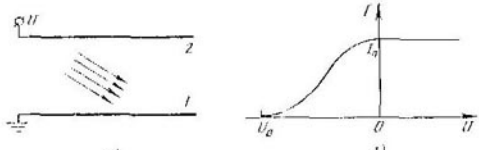


Para el problema 13.5.3.

Se han recibido tres fotografías del cuadrado para longitud de onda de $5 \cdot 10^{-5}$ cm. Las dimensiones de la imagen son 10×10 cm^2. Estímese, haciendo uso de la fórmula de Planck $E = h\nu$ ($h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ ergio/Hz es la constante de Planck), la iluminación de la lámina fotográfica en cada uno de los casos. El tiempo de puesta

en funcionamiento del obturador de la cámara fotográfica es de 10^{-3} s.

13.5.4. En un volumen, en el que se ha creado el vacío, se encuentran dos láminas paralelas metálicas. Sobre una lámina puesta a tierra incide un flujo de radiación ultravioleta con frecuencia ν que arranca electrones de ella. La corriente de dichos electrones



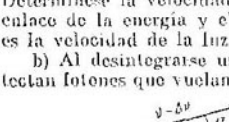
Para el problema 13.5.4.

depende de la tensión, que se aplica a la segunda lámina, de la manera expuesta en la gráfica. Determínese, utilizando la gráfica, el trabajo de salida de los electrones de la primera lámina.

13.5.5. Al chocar un positrón con un electrón, con frecuencia, tiene lugar la aniquilación de estas partículas: ellas se transforman en dos rayos gamma. ¿En qué caso las energías de estos rayos gamma serán iguales y ellos se moverán en sentidos opuestos? ¿Cuál será la frecuencia mínima de semejantes rayos gamma?

13.5.6. a) Al desintegrarse el mesón π en dos fotones, se detectan fotones con energías ε_1 y ε_2 que vuelan en sentidos opuestos. Determínese la velocidad del mesón desintegrado. Para el fotón el enlace de la energía y el impulso tiene la forma $\varepsilon = pc$, donde c es la velocidad de la luz.

b) Al desintegrarse una partícula neutra en dos fotones, se detectan fotones que vuelan bajo los ángulos θ_1 y θ_2 hacia la dirección del movimiento de la partícula. Determínese la velocidad de la partícula desintegrada.



Para el problema 13.5.7.

13.5.7. a) Un rayo gamma con frecuencia ν se disipa por una partícula inmóvil bajo el ángulo θ respecto a la dirección inicial. En este caso la frecuencia del rayo gamma disminuye en $\Delta\nu \ll \nu$. Determínese la masa de esta partícula.

b) Un fotón con frecuencia ν se disipa por el electrón. Determínese la variación de la frecuencia del fotón, disipado bajo el ángulo θ, $h\nu \ll m_e c^2$.

13.5.8*. Los átomos que vuelan a velocidad v emiten en dirección del movimiento fotones con frecuencia ν. ¿Con qué frecuencia

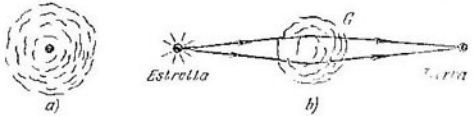
se emiten los fotones en dirección: a) contraria al movimiento de los átomos; b) perpendicularmente al movimiento de los átomos? El impulso del fotón es mucho menor que el impulso del átomo.

13.5.9. La luz, emitida de la superficie de una estrella, tiene una frecuencia tanto menor, cuanto más maciza es la estrella y menor su radio. ¿Cómo puede explicarse este efecto? ¿Por qué lo denominan corrimiento hacia el rojo?

13.5.10. Determínese el corrimiento hacia el rojo para una estrella de masa M y radio R, si la frecuencia de la luz en la superficie estelar es igual a ν. Estímese el corrimiento hacia el rojo para el Sol en la zona visible. ¿Qué efectos estorban a detectar el mencionado corrimiento en la radiación del Sol?

13.5.11. ¿Al adquirir qué radio una estrella con masa M se convertirá en «agujero negro», es decir, cesará de emitir luz? Estímese este radio para el Sol.

13.5.12*. Muchas acumulaciones cuasiestelares gigantescas (quasares) están rodeadas de una nube brumosa. La mayoría de los



Para el problema 13.5.12*

científicos considera que esta nube es el producto de la desintegración del quasar. Un joven colaborador científico propuso otra hipótesis. Él considera que la nube brumosa es una galaxia esférica que enfoca mediante el campo de gravitación la luz de una estrella lejana hacia nuestra Tierra, mientras que el quasar es la estrella «enfocada». Determínese la distancia focal de la galaxia esférica de radio R y masa M, si las estrellas se distribuyen uniformemente en ella. Estímese la distancia focal de la Nebulosa de Andrómeda. El radio de la Nebulosa es unos 20 kiloparsecs y la masa total es de unas $3 \cdot 10^{11}$ masas del Sol. Valórese a qué distancia mínima debe encontrarse la estrella que se enfoca por semejante galaxia sobre la Tierra.

RESPUESTAS

Capítulo 1

CINEMÁTICA

§ 1.1. Movimiento a velocidad constante

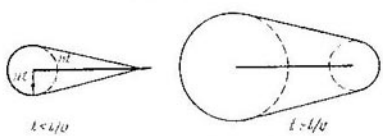
1.1.1. $v = 200$ m/s.
1.1.2. $v = 0{,}7$ km/s; al sudeste.
1.1.3. $v = 3$ m/s; a una distancia de 1 m del techo y 2 m de la pared.
1.1.4. $x = 1{,}45$ m.
1.1.5*. $AO = l\,\dfrac{3t_A - 2t_B - t_C}{2(t_A - t_B)}$.

1.1.6. $t' = l\,\dfrac{v - u}{v + u}$.

1.1.7. $v = c\,\dfrac{T_0 - T}{T_0 + T}$.

1.1.8. $v' = v\,\dfrac{c - u}{c - v}$.

1.1.9. a) Cuando $t < l/v$ el límite de la zona es un cono con vértice que dista ut del extremo de la barra y que pasa a ser una esfera de radio ut, tangente



Respuesta al problema 1.1.9a.

a dicho cono. Cuando $t \geq l/v$ son esferas con centros que yacen en los extremos de la barra y radios ut y $u(t - l/v)$ unidas con una superficie cónica, tangente a ellas. b) $\cos\alpha = u/v$.

1.1.10*. Desde la zona del ángulo de 60° con el vértice en el punto A, cuya bisectriz es la carretera.

1.1.11*. $v = cl/\sqrt{l^2 - c^2\tau^2}$.

1.1.12. $u = v\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

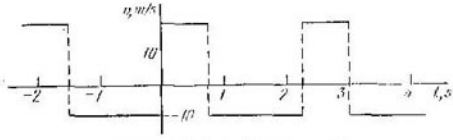
1.1.13. Véase la figura.

1.1.14. La ordenada y la abscisa del punto de intersección de las gráficas $x_1 = vt$ y $x_2 = a + v(t - \tau)/2$ nos dan el tiempo y la coordenada: $t' = (2a - v\tau)/v$, $x' = 2a - v\tau$.

1.1.15. Véase la figura; b) $v_m = 0$, c) $v_m = 1$ m/s.

1.1.16. Véase la figura.

1.1.17. Véase la figura. a) El retorno del haz por el eje x transcurre durante un tiempo muy corto y por eso a la unidad de longitud van a parar pocos electrones.



Respuesta al problema 1.1.13.

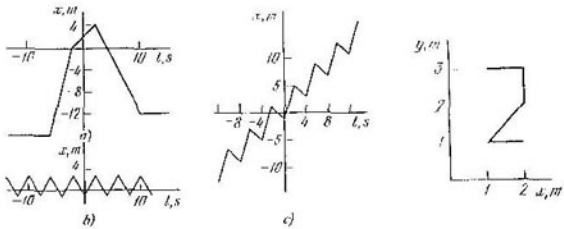
b) Para $T/T_0 = m/n$, donde m y n son cualesquiera números enteros.

1.1.18. $x = 2lv\dfrac{v\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{c^2 - v^2\cos^2\alpha}}{c^2 - v^2}$.

1.1.19. $\beta = 2\alpha$. En dirección contraria a la inicial.

1.1.20*. $\operatorname{tg}\varphi = 2ma/nb$, donde m y n son cualesquiera números enteros.

1.1.21. $(-e_x;\ e_y;\ e_z)$, $-e$.



Respuesta al problema 1.1.15

Respuesta al problema 1.1.16.

1.1.22*. Véase la figura. La probabilidad es nula junto a las paredes, y máxima en cualquier punto distante más de $2R$ desde las paredes, siendo igual a $2R/(L - 2R)$ cuando $L < 4R$, así como en cualquier punto distante más de $(L - 2R)$ desde las paredes, siendo igual a 1 cuando $4R \geqslant L \geqslant 2R$.

§ 1.2. Movimiento a velocidad variable

1.2.1. $v_m = \dfrac{2}{\pi}v\dfrac{R-r}{R+r}$; está dirigida por el limite de separación.

1.2.2. Cualquier gráfica en la que la coordenada durante el tiempo dado varíe en 20 m y la pendiente máxima de la tangente sea de 15 m/s.

1.2.3. $t = 12$ s; $x = 24$ m.

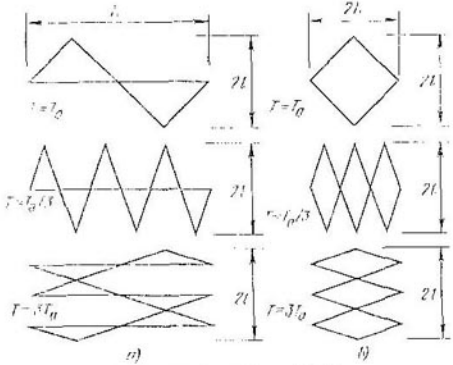
1.2.4. $L = v_0 t + \dfrac{v_0}{2\tau}(t-\tau)^2$.

1.2.5. $x = \dfrac{\pi}{4}v_0 t_0$.

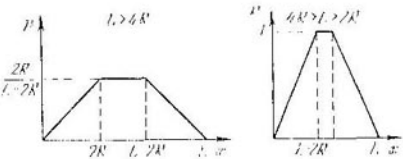
1.2.6. La velocidad media es mayor que la inicial y la finita es nula.
1.2.7. $v = \sqrt{La}$.
1.2.8. $v = \sqrt{Nfb}$.
1.2.9. $t = R/q$.

1.2.10*. a) $v = \frac{\pi r_0^2 t^2 \lg^2 \alpha}{s}$; b) $v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{xht}}$.

1.2.11. $q = 425{,}6$ cm/s.

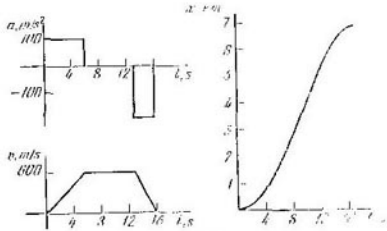


Respuesta al problema 1.1.17

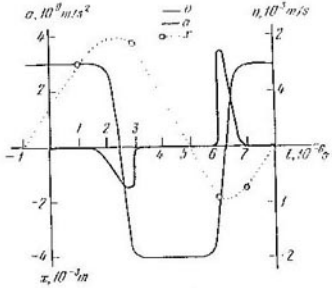


Respuesta al problema 1.1.22*.

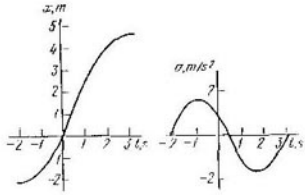
1.2.12. $v_1 = 43$ m/s; $v_2 = 423$ m/s.
1.2.13. Véase la figura; $v = 600$ m/s. De 6 a 6,9 km. $x = 6{,}9$ km. Verifíquese la igualdad de las áreas por encima y debajo del eje t en la gráfica de aceleración.
1.2.14. 4 y 16.
1.2.15. Véase la figura. La relación de los módulos de la aceleración es 2.
1.2.16. Véase la figura.
1.2.17. $v = 0{,}72$ cm/s.
1.2.18*. $t = (2 + \sqrt{2})\,\tau$.
1.2.19*. En 51 s.



Respuesta al problema 1.2.13.



Respuesta al problema 1.2.15.



Respuesta al problema 1.2.16.

§ 1.3. Movimiento en el campo gravitatorio. Movimiento curvilíneo

1.3.1. $t = v/g - \tau/2$.

1.3.2. a) $t = \sqrt{2D/g}$. b) En una circunferencia del diámetro $gt^2/2$ con el punto superior A.

1.3.3*. Bajo el ángulo $\varphi/2$ hacia la vertical.

1.3.4. $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$.

1.3.5. $t = \frac{v}{g}(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi \operatorname{tg}\alpha)$.

1.3.6. a) $v_x = v\cos\varphi$, $v_y = v\operatorname{sen}\varphi - gt$.

b) $x = v\cos\varphi \cdot t$, $y = v\operatorname{sen}\varphi \cdot t - gt^2/2$.

c) $y = x\operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v^2}(\operatorname{tg}^2\varphi + 1)$.

d) $T = \frac{2v\operatorname{sen}\varphi}{g}$, $H = \frac{v^2\operatorname{sen}^2\varphi}{2g}$, $L = \frac{v^2\operatorname{sen}2\varphi}{g}$.

1.3.7. $L = \sqrt{2}v^2/g$.

1.3.8. $L = \frac{2v^2\cos^2\beta}{g\cos\alpha}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$.

1.3.9. $v = \sqrt{L(a+g)}$.

1.3.10. $H = \frac{2v(v\cos\alpha - u)\operatorname{tg}^2\alpha}{g}$.

1.3.11. $L = \frac{2v^2}{g(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha)}$.

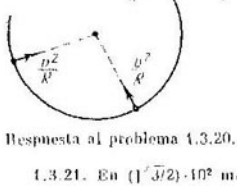
1.3.12*. $m = 7$ kg.

1.3.13*. a) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - 2gv^2y - g^2x^2}}{gx}$.

b) $y = v^2/(2g) - gx^2/(2v^2)$.

c) $v = \sqrt{g(y + \sqrt{x^2 + y^2})}$.

1.3.14. $x_{rel} = v\cos\varphi \cdot \tau$, $y_{rel} = v\operatorname{sen}\varphi \cdot \tau - g\tau^2/2 - g\tau/4$. La velocidad relativa es constante, está dirigida verticalmente hacia abajo y es igual, según el módulo, a $g\tau$.



Respuesta al problema 1.3.20.

1.3.15. $v = \sqrt{\frac{2\pi Rga}{\operatorname{sen}2\alpha}}$, donde n es cualquier número natural.

1.3.16. $v_e = 1675$ km/h, $a_e = 0{,}034$ m/s^2; $v_L = 838$ km/h, $a_L = 0{,}017$ m/s^2.

1.3.17. $v = 8$ km/s.

1.3.18. $a = -\omega^2 r$.

1.3.19. $v_1 = -\omega x_0 \operatorname{sen}\omega t$, $v_2 = \omega x_0 \times \cos\omega t$, $a_1 = -\omega^2 x_0\cos\omega t$, $a_2 = -\omega^2 x_0 \times \operatorname{sen}\omega t$.

1.3.20. Véase la figura.

1.3.21. En $(\sqrt{3}/2)\cdot 10^2$ m/s; en $5\cdot 10^{-5}$ rad; $\omega = 5\cdot 10^{-3}$ rad/s.

1.3.22. $a = \sqrt{k^2 + k^4 t^4 r^2}$.

1.3.23. $v = \sqrt{rg}$.

1.3.24*. $v = \sqrt{5Rg}$.

1.3.25. 27,5 y 42,4 km; 18,3 y 52 km; 9,17 y 73,4 km

1.3.26. $a = \frac{v^2}{R} \cos^2 \alpha$.

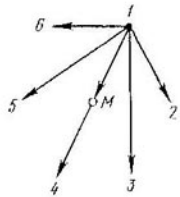
§ 1.4. Transformación de Galileo

1.4.1. En el sistema de referencia del segundo barco, el primero se mueve por la recta a lo largo del vector $v_1 - v_2$. La perpendicular bajada a dicha recta, desde el punto donde se encuentra el segundo barco, es la distancia mínima.

1.4.2. Véase la figura.

1.4.3. El mismo.

1.4.4. Véase la figura.



Respuesta al problema 1.4.2.

Respuesta al problema 1.4.4.

1.4.5. a) $\operatorname{tg} \varphi = u/v$, donde φ es el ángulo con la vertical en dirección de movimiento. b) $10\sqrt{3}$ m/s.

1.4.6. $v_{máx} = v\sqrt{3}$.

1.4.7. $t = \frac{2L\sqrt{v^2 - u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}}{v^2 - u^2}$. A lo largo de la ruta.

1.4.8. a) $\Delta v = -2(v + u)$; b) $\Delta v = -2(v - w)$. La proyección sobre la dirección de la velocidad inicial se considera positiva.

1.4.9. a) $u = v$; b) $u = \sqrt{v^2 + 4vw \cos \alpha + 4w^2}$;

c) $u = \sqrt{v^2 + 4vw \cos \alpha \cos \beta + 4w^2 \cos^2 \beta}$.

1.4.10. $v = \sqrt{v^2 + u^2}/2(R - r)$.

1.4.11. $t = 2\sqrt{u^2/g^2 + 2h/g}$.

1.4.12. La proyección sobre la horizontal es $v_x = v - 2u$, la proyección sobre la vertical es $v_y = \frac{(2n-1)L}{v-u} g$.

1.4.13. $n = (v_1 + v_2)/4\pi R$.

1.4.14. $\operatorname{sen} \alpha = u/v$.

1.4.15*. $u = v\sqrt{3}$; $u = v\left(\sqrt{3+\cos^2\varphi} \pm \cos\varphi\right)$.

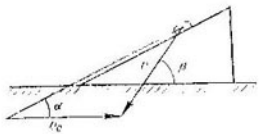
1.4.16. En el nuevo sistema de referencia la geometría de los haces y, por lo tanto, la zona de intersección son las mismas que antes. La velocidad no obligatoriamente está dirigida a lo largo del haz.

1.4.17. En $\sqrt{1+v^2/u^2}$ veces. En general, sí.

1.4.18*. $\alpha = 60°$; $l = 200\sqrt{3}$ m ≈ 345 m

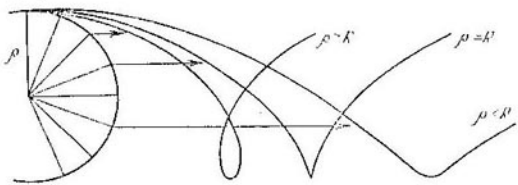
§ 1.5. Movimiento con enlaces

1.5.1. $v_B = 2v_A$.
1.5.2. $r = \omega R$; $v_c = \omega(R - r)$.
1.5.3. $v_c = v\sqrt{3}$.
1.5.4. $a = g\operatorname{ctg}\alpha$.
1.5.5. Véase la figura.
1.5.6. (—2,8; 3,1).



Respuesta al problema 1.5.5.

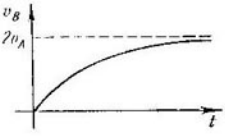
1.5.7. a) $u_{AB} = (\sqrt{2}/2)v$; b) $u_1 = \sqrt{u^2 - v^2}$.
1.5.8. a) Véase la figura; b) $a = (v^2/R^2)\rho$; c) $r_{sup} = (R + \rho)^2/\rho$, $r_{inf} = (R - \rho)^2/\rho$.



Respuesta al problema 1.5.8a.

1.5.9*. $u = \dfrac{vR}{R\cos\alpha - r}$, $\omega = \dfrac{v}{R\cos\alpha - r}$;

a la derecha cuando $\cos\alpha > r/R$, a la izquierda cuando $\cos\alpha < r/R$.
1.5.10. $n_A = (n_1 R - n_2 r)/(R - r)$.
1.5.11. El diámetro del cilindro.
1.5.12. a) Una; b) en 4 min.
1.5.13 $a = 4\omega^2 R$.
1.5.14 $u = v\cos\alpha$.
1.5.15. En el centro del cuadrado al cabo del tiempo $t = a/v$.
1.5.16. Véase la figura; $v_B = 2v_A^2 t/\sqrt{L^2 + v_A^2 t^2}$.



Respuesta al problema 1.5.16.

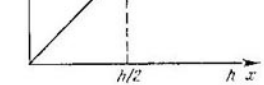
1.5.17. $u = v^2 t / \sqrt{L^2 - v^2 t^2}$.
1.5.18. $\omega = v \operatorname{sen}^2 \alpha / H$.
1.5.19. $\omega' = \omega/2 \operatorname{sen}^2 (\alpha/2)$.
1.5.20. $u = v^2 t / \sqrt{R^2 - v^2 t^2}$.
1.5.21. $\omega = v / \sqrt{R^2 - vht/\pi}$.

Capítulo 2

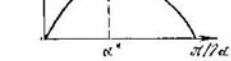
DINÁMICA

§ 2.1. Leyes de Newton

2.1.2. $T = F(1 - x/l)$.
2.1.3. $t = T(m_1 + m_2)/\alpha (2m_1 + m_2)$.
2.1.4. $a_1 = a_2 = g \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$, $T_1 = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $T_2 = 2T_1$.
2.1.5. $a = 3{,}3$ m/s^2; $N \approx 1{,}1 \cdot 10^7$ N.
2.1.6. $t = \dfrac{Fc}{mg}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{mg}{F}}\right)$.
2.1.7*. $S = \dfrac{g\tau^2}{2}\left(\sqrt{\left(\dfrac{F}{mg}\right)^2 - \cos^2\alpha} - \operatorname{sen}\alpha\right)$.
2.1.8. La aceleración de la bola superior es $3g$ y de las otras dos, nula.
2.1.9. Véase la figura.



Respuesta al problema 2.1.9.



Respuesta al problema 2.1.10.

2.1.10. Véase la figura; $F_{fr}^* = mg \operatorname{sen}\alpha^*$, $\operatorname{tg}\alpha^* = \mu$.
2.1.11. $a < g(\mu \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$.

2.1.12. $a=\dfrac{F}{m}\cos\alpha-\mu g\left(1-\dfrac{F}{mg}\operatorname{sen}\alpha\right)$ cuando $F\geqslant\dfrac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\operatorname{sen}\alpha}=F_0$; $a=0$ cuando $F\leqslant F_0$.

2.1.13*. $\beta=\alpha+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\mu$.

2.1.14. $a=g\left(\operatorname{sen}\beta-\dfrac{\mu\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}\right)$, cuando $\mu<\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\alpha/2$; $a=0$, cuando $\mu>\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\alpha/2$

2.1.15. $F=mg\cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha-\mu\cos\alpha)$, cuando $\mu\leqslant\operatorname{tg}\alpha$; $F=0$, cuando $\mu\geqslant\operatorname{tg}\alpha$.

2.1.16. a) $F>\mu(M+m)g$; $t=\sqrt{\dfrac{2Ml}{F-\mu(M+m)g}}$.

b) $a_m=\dfrac{F_0-\mu mg}{m}$; $a_M=\mu gm/M$.

2.1.17. $a_m=a_M=\dfrac{F}{2(M+m)}$, cuando $F\leqslant\dfrac{2\mu mg(M+m)}{M+2m}=F_0$. La aceleración de la carga derecha inferior es $a_1=\dfrac{F-\mu mg}{M}$, y la de las demás $a_2=\mu mg/(M+2m)$, cuando $F\geqslant F_0$.

2.1.18. $|a|=\dfrac{|m_1-m_2|g-F}{m_1+m_2}$, cuando $|m_1-m_2|g\geqslant F$; $a=0$, cuando $|m_1-m_2|g\leqslant F$.

2.1.19*. $v_1=u-\dfrac{\mu}{\alpha}(Mg-F)$.

2.1.20. Las gruesas.

2.1.21*. a) $S_1=5$ m; b) $S_2=10$ m.

2.1.23. $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{R\mu}{(l+R)\sqrt{1+\mu^2}}$.

2.1.24. $d=\dfrac{v}{2\mu g}\sqrt{\mu^2+u^2}$.

2.1.25*. $v=\omega R/\sqrt{(F_0/F)^2-1}$.

2.1.26*. $v=u\operatorname{tg}\alpha/\sqrt{\mu^2-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

2.1.27*. $u=v/2$.

2.1.28*. $\Delta S=Nl\dfrac{\alpha(t_2-t_1)\operatorname{tg}\varphi}{\mu}$.

2.1.29*. $n=1/2\pi\mu$.

2.1.30. $a_M=\dfrac{mg\operatorname{tg}(\alpha/2)}{m+2M\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$; $a_m=\dfrac{mg}{m+2M\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$.

2.1.31. a) $N_1=3/2mg$; $N_2=\dfrac{1}{2}mg$. b*) $N_1=\dfrac{1}{2}mg(5\cos\varphi+3\operatorname{sen}\varphi-2)$; $N_2=\dfrac{1}{2}mg(5\operatorname{sen}\varphi+3\cos\varphi-2)$.

2.1.32*. $a=g\operatorname{tg}\alpha$; $m=M\operatorname{sen}\alpha/(1-\operatorname{sen}\alpha)^2$.

2.1.33*. $\omega=vh/R^2$.

2.1.34. $T=M\omega^2l$; $T_x=M\omega^2l+\dfrac{m\omega^2}{2l}(l^2-x^2)$.

2.1.35. $T_1=m_1\omega^2l_1$; $T_2=m_1\omega^2l_1+m_2\omega^2l_2$.

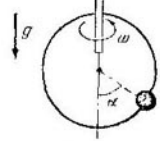
2.1.36. $\omega=\sqrt{\dfrac{g\operatorname{tg}\beta}{l(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)}}$.

2.1.37. $T = \dfrac{2mv^2}{l} \operatorname{sen}^2 \alpha$.

2.1.38. $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 R}$, cuando $\dfrac{g}{\omega^2 R} < 1$; $\alpha = 0$, cuando $\dfrac{g}{\omega^2 R} \geqslant 1$.

2.1.39*. $R = R_0 \dfrac{4\pi^2 k}{4\pi^2 k - m\omega^2}$, cuando $\omega < 2\pi\sqrt{k/m}$, mientras que cuando $\omega > 2\pi\sqrt{k/m}$ el anillo se estira ilimitadamente.

2.1.40. $\omega = \left(\dfrac{g^2\mu^2 - \varepsilon^2 R^2}{R^2}\right)^{1/4}$, si $\varepsilon < \mu g/R$; desde un principio si $\varepsilon > \mu g/R$.



Respuesta al problema 2.1.38.

2.1.42. $v = \sqrt{\mu g R}$; $\beta = \operatorname{arctg}\mu$; $v' = \sqrt{\dfrac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{\mu(1 - \mu\operatorname{tg}\alpha)}}$.

2.1.43*. $\mu \geqslant \dfrac{g + \omega^2 R \operatorname{tg}\alpha}{\omega^2 R - g\operatorname{tg}\alpha}$, siendo $\omega < \sqrt{g\operatorname{tg}\alpha/R}$. Cuando $\omega < \sqrt{g\operatorname{tg}\alpha/R}$ el movimiento por la circunferencia es imposible.

2.1.44. $\omega_{máx} = \sqrt{\dfrac{g(\mu\operatorname{ctg}\alpha - 1)}{R(\mu)\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}}$.

2.1.45*. $\omega > \sqrt{g\sqrt{2}/R}$.

2.1.46. $T = 6\ mg$.

2.1.47. $x = l\dfrac{T - 3mg}{T - mg}$.

2.1.48. En el punto superior; en el punto inferior, la aceleración resulta dirigida horizontalmente si el ángulo entre el hilo y la vertical es igual a $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. $T = 3mg$.

2.1.49. $t = \dfrac{1}{2} R\operatorname{ctg}\alpha$.

2.1.50. $h = {}^2/_3 R$.

2.1.51. $v = \sqrt{(2H + 3R)g}$

2.1.52. $F = mg(3\operatorname{sen}\alpha - 2)\cos\alpha$, cuando $\operatorname{sen}\alpha \geqslant 2/3$, $F = 0$, cuando $\operatorname{sen}\alpha \leqslant 2/3$.

2.1.53. $H_{mín} = 2{,}5\ R$.

2.1.54*. $F = \dfrac{2\pi Rmg}{4\pi^2 R^2 + h^2}\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2 + 16\pi^2 H^2}$.

2.1.55. $M = \dfrac{3}{\pi - 1} m$.

2.1.56*. $t = 2\tau$.

2.1.57. $F = Mg - \rho V a$.

§ 2.2. Impulso. Centro de masas

2.2.1. $u = {}^3/_2 v$.

2.2.2. $t = |\Delta p|/mg$.

2.2.4. $m = M/31$.

2.2.5*. $u_m = v - b_0 x/m$; $u_M = F_0 x/Mt$.

2.2.6. $m_1/m_2 = 4/3$.

2.2.7. A la distancia de $4L$ del cañón.

2.2.8. $S/L = 35/36$

2.2.9. $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}$.

2.2.10. $u' = \sqrt{(mv)^2 + (Mu)^2}/(M+m)$.

2.2.11*. $u = v(\alpha_1 - \alpha_2)/8\pi$.

2.2.12. $T = 2\pi\sqrt{2H/3g}$.

2.2.13*. $F = \dfrac{m_1m_2v^2}{(m_1+m_2)l}$.

2.2.14. $t_m = t\dfrac{M}{M+m}$; $t_M = t\dfrac{m}{M+m}$.

2.2.15. $u = v\dfrac{\mu t}{M+\mu t}$, si $t \leqslant m/\mu$; $u = v\dfrac{m}{m+M}$, si $t \geqslant m/\mu$.

2.2.16. Con una velocidad $u/4$, dirigida hacia arriba.

2.2.17. $n = \dfrac{Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}{mv}$.

2.2.18. $F = \rho S u^2$.

2.2.19. En $\sqrt{2}$ veces.

2.2.20. $u = (\sqrt{3}/2)v$, $N = 1000$.

2.2.21*. $u = v - \sqrt{\mu Mg/2\rho S}$; $u = 0$, cuando $2\rho Sv^2 \leqslant \mu Mg$.

2.2.22*. $u = v(\cos\alpha - \mu\,\mathrm{sen}\,\alpha) - \dfrac{\mu Mg}{\rho Sv\,\mathrm{sen}\,\alpha}$;

$u = 0$, cuando $\mu \geqslant \dfrac{\rho Sv^2\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{2(\rho Sv^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + Mg)}$.

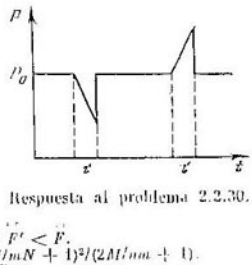
2.2.23. $v = u - k/\rho S$.

2.2.24. $v = \sqrt{\dfrac{F(\rho-\rho_0)}{\pi r^2\rho\rho_0}}$.

2.2.25. $\mu = Mg/u$; $\mu' = M(g+a)/u$.

2.2.26. La segunda.

2.2.27. $a(t) = F/(M - \Delta mt)$; $v(t) = -\dfrac{F}{\Delta m}\ln\left(1 - \dfrac{\Delta mt}{M}\right)$.



Respuesta al problema 2.2.30.

2.2.28. $F = nmg$; $F' < F$.

2.2.29. $H = h(M/mN + 1)^2/(2M/mn + 1)$.

2.2.30. Véase la figura.

2.2.31. $F = \dfrac{m}{l}(v^2 + gl)$.

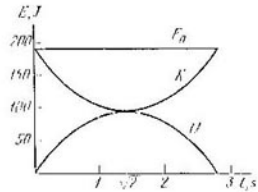
2.2.32. $F = 3mg(1 - x/l)$.

2.2.33. $N = 2(F - \rho v^2)\cos(\alpha/2)$.

2.2.34. $v = \sqrt{gh}$.
2.2.35. $F = \mu_1 u + \mu_2 (u - v)$.
2.2.36*. a) $u = v \ln n$; b) $M \approx 5{,}5 \cdot 10^6$ kg.
2.2.37. $v = \dfrac{V(\rho_0 - \rho)}{\rho V + \rho_0 V_0} u$.
2.2.38*. $v = \dfrac{v_0 \operatorname{tg} \alpha}{\mu}$.

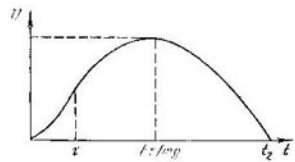
§ 2.3. Trabajo. Energía

2.3.1. $A_{fr} = -\mu mgh \operatorname{ctg} \beta$; $A_g = -mgh$.
2.3.2. $A = \mu mgL$.
2.3.3*. $A = \mu Pl (1 + r/R)$.
2.3.4. $N > mgu (\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha)$.
2.3.5. $v = v_1 v_2 (N_1 + N_2)/(N_1 v_2 + N_2 v_1)$.
2.3.6*. $v(t) = \mu g t$, cuando $t \leqslant t_0 \equiv N/|m(\mu g)^2|$; siendo $t \geqslant t_0$, $v(t) = \sqrt{\dfrac{2N}{m}\left(t - \dfrac{N}{2m(\mu g)^2}\right)}$.
2.3.7. $F = \rho S v (u - v)$.
2.3.8. $N = Mgu/2$.
2.3.9. Véase la figura.



Respuesta al problema 2.3.9.

2.3.10. $E = 4 \cdot 10^{-4} E_0$.
2.3.11. $A = u^2 m$.



Respuesta al problema 2.3.13.

2.3.12. En el sistema de referencia móvil la fuerza de tensión de la barra realiza trabajo.
2.3.13. Véase la figura;

$$U_{máx} = F\left(\frac{F}{mg} - 1\right)\frac{g\tau^2}{2}, \qquad t_2 = \frac{F\tau}{mg}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{mg}{F}}\right).$$

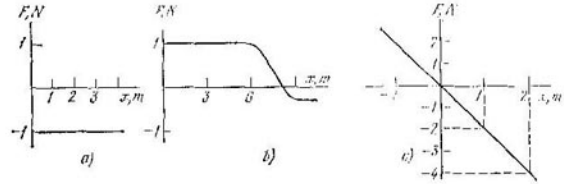
2.3.14. Véase la figura.
2.3.15. Véase la figura.
2.3.16. a) $F = -U_0/x_0$; b) $F = -2U_0 x^2/x_0^2$; c) $F = U_0 x_0^2/x^2$.
2.3.17. a) $U = -F_0 x + C$; b) $-F_0 x^2/2x_0 + C$; c) $U = F_0 x_0^2/x + C$, donde, C es una constante arbitraria.
2.3.18. $F = Ul\alpha^2$ m.
2.3.21. $A = 9{,}8$ J.
2.3.22. $A = MgL/2$.
2.3.23*. $A = \dfrac{\pi d^2 l^2}{2} g (\rho - \rho_0/4)(1 - d^2/D^2)$.

2.3.24. El cuerpo que se mueve a lo largo del rayo.

2.3.25*. $t = 0$, $h = v^2/2g + v\tau + (v/\tau + F/2M)(FM - g)\tau^2/g$.

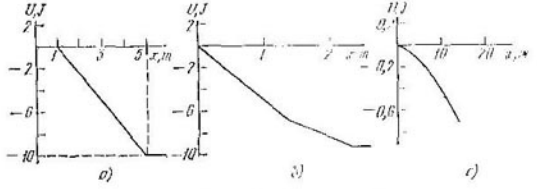
2.3.26*. $t = \sqrt{2l_1/g}\,(2\sqrt{2} - 1)$.

2.3.27. $\operatorname{sen}\beta = v \operatorname{sen}\alpha/\sqrt{v^2 + 2gh}$.



Respuesta al problema 2.3.44.

2.3.28. $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \dfrac{v_1 \cos\alpha}{\sqrt{v_1^2\cos^2\alpha - 2(U_2 - U_1)/m}}$; cuando $\dfrac{mv_1^2\cos^2\alpha}{2} < U_2 - U_1$.



Respuesta al problema 2.3.45.

2.3.29. a) y b) $v = \sqrt{2gl}$.

2.3.30*. $v = \sqrt{gl}$.

2.3.31. $v_{\max} = \sqrt{4gl\,(2 - \sqrt{3})/3}$; $x_{\max} = 4l/3$.

2.3.32*. $v \approx \sqrt{\dfrac{gl}{2\pi}\,(1 - \rho_a/\rho_{ag})\,\sqrt{2} + 2)}$.

2.3.33. $v = \sqrt{2gl\,(1 - l/L)}$.

2.3.34. $F = 7/9$ mg.

2.3.35*. $a = g \operatorname{sen}(\alpha/2)$.

2.3.36. $Q = A \dfrac{\mu}{\mu + \operatorname{tg}\alpha}$.

2.3.37. $Q = 4{,}4 \cdot 10^{-2}$ J.

2.3.38. $Q = m_1 gh \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$.

2.3.39. $S = \dfrac{F}{\mu M g}\,(F/M - \mu g)\,\tau^2/2$, cuando $F > \mu M g$; cuando $F < \mu M g$, $S = 0$.

2.3.40. $S = \dfrac{F}{mg\,(1 + m/M)}\,[F/m - \mu g\,(1 + m/M)]\,\tau^2/2$, cuando $F > \mu mg\,(1 + m/M)$; siendo $F < \mu mg\,(1 + m/M)$, $S = 0$.

2.3.41. $v = \sqrt{4gH\,(1 - A/2mgH)}$.

2.3.42. $A = 2\pi\mu m v^2$.

2.3.43. $n = \dfrac{\omega^2 R\,(1 + \mu^2)}{4\pi g \mu\,(1 + \mu)}$.

2.3.44*. $v = \sqrt{gl\,(\operatorname{sen}\alpha - 2\mu\cos\alpha)}$.

2.3.45. $Q = 2mgR\,(1 - \sqrt{1 - l^2/4R^2})\,\sqrt{1 - l^2/4R^2}$.

2.3.46. $h = \dfrac{v^2}{2g\,(1 - \mu\operatorname{ctg}\alpha)}$.

2.3.47. $A > mgH + \dfrac{m}{2}\,(v + H/v\operatorname{sen}\alpha)^2$.

2.3.48. $v = 2L\sqrt{k/m}$.

2.3.49. $x = v\sqrt{m/k}$.

2.3.50. $h = 2mg/k$.

2.3.51. $k = 2mg/k$; $v = g\sqrt{m/k}$.

2.3.52. $k = Mgx_0/2\,(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l)^2$.

2.3.53. $v = (l - l_0)\sqrt{k/2m}\cos\alpha$.

2.3.54. $F = Mg\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2k}{Mg}\,(H - l)}\right)$.

2.3.55. $F = (m_1 + m_2)\,g$.

2.3.56*. $h \approx 0{,}25$ m.

2.3.57*. $x = \dfrac{m}{k}\,(g - a)$; $x_{máx} = \dfrac{m}{k}\,(g + \sqrt{2ga - a^2})$, cuando $a < g$; $x = 0$, $x_{máx} = 2mg/k$ para $a > g$.

2.3.58*. $F \geqslant \mu g\,(m + M/2)$.

2.3.59*. $x = Lm^2/(M^2 - m^2)$.

2.3.60*. $m > \mu M/2$.

2.3.61. $x_{mín} = l_0$; $x_{máx} = l_0 + F/k$.

2.3.62*. $Q = F^2/8k$.

2.3.63*. $x = \dfrac{\mu mg\cos\alpha}{2k}\left[1 + \sqrt{1 - 2\left(1 - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}\right)^2}\right]$ si $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \mu \leqslant 3\operatorname{tg}\alpha$; $x = \dfrac{\mu mg\cos\alpha}{k}$, si $\mu \leqslant \operatorname{tg}\alpha$; $x = \dfrac{2mg\operatorname{sen}\alpha}{k}$, si $\mu \geqslant 3\operatorname{tg}\alpha$

§ 2.4. Principios de conservación de la energía y el impulso

2.4.1. $u_1/u = (k - 1)/(k + 1)$; $u_2/u = 2k/(1 + k)$. $u_1/u \to 1$; $u_2/u \to 2$.

2.4.2*. $\alpha = \pi/2$.

2.4.3. $\cos\beta = v_1 v_2 \cos\alpha/u_1 u_2$.

2.4.4. La masa del neutrón es próxima a la masa del protón. Por eso en caso de dispersión elástica en el hidrógeno el neutrón pierde más energía que al dispersarse en los núcleos de plomo.

2.4.6. $t = t_n - t_{n-1} = 2\tau$.

2.4.7*. sen $\alpha = m/M$.

2.4.8. $v_1 = v\sqrt{\dfrac{m_2 m_3}{m_1 (m_1 + m_3)}}$; $v_2 = v\sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{m_3 (m_1 + m_3)}}$.

2.4.9. Véase la figura; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{M+m}{M-m}\operatorname{tg}\alpha$.

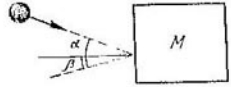
2.4.10. $t = \dfrac{2R\cos\alpha}{v}$.

2.4.11*. $u = \dfrac{v}{2}\left(1 - \sqrt{\dfrac{m^2}{M(M+m)}}\right)$.

2.4.12*. $v_{\min} = \sqrt{gH\operatorname{ctg}^2\alpha/2\cos 2\alpha}$.

2.4.13. $v_{\min} = \sqrt{2g(H+h)(1+m/M)}$.

2.4.14*. $H = h + \dfrac{v^2 - 2gh(1+m/M)}{2g[1+(m/M)\operatorname{sen}^2\alpha]}\operatorname{sen}^2\alpha$.



Respuesta al problema 2.4.9.

2.4.15*. $v_m = \sqrt{2gRM/(M+m)}$; $v_M = (m/M)\sqrt{2gRM/(M+m)}$. $N = mg(3+2m/M)$.

2.4.16. $v = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}/M$.

2.4.17. $m_1/m_2 > 20$.

2.4.18. $\dfrac{Q}{K} = \dfrac{4}{A}\left(3 - \dfrac{m}{M}\right)$.

2.4.19. $Q_1 = 2\sqrt{Q_2 m}\,(v - 2\sqrt{Q_2/m})$.

2.4.20. $E = 35{,}7$ keV.

2.4.21. $v_{\min} = \sqrt{2E(1/m_c + 1/M)}$.

2.4.22. $v_1 = \sqrt{\dfrac{2Em_2}{m_1(m_1+m_2)}}$; $v_2 = \sqrt{\dfrac{2Em_1}{m_2(m_1+m_2)}}$.

2.4.23*. $v_{\max} = v + 2\sqrt{K/3m}$.

2.4.24. $E = \dfrac{p_1^2 m_2^2 + p_2^2 m_1^2 - 2m_1m_2p_1p_2\cos\theta}{2m_1m_2(m_1+m_2)}$.

2.4.25. $E = p^2\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{2}{m_1}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

2.4.26. $E = 12$ MeV.

2.4.27. $h/h_0 = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$.

2.4.28. $v_{\text{mín}} = x_0 \sqrt{k\,(1/m + 1/M)}$.

2.4.29. $h_1 = \dfrac{m_2 U}{m_1 g\,(m_1 + m_2)}$; $h_2 = \dfrac{m_1 U}{m_2 g\,(m_1 + m_2)}$.

2.4.30. $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - 2\mu$, $\mu \leqslant \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$; $\beta = 0$, $\mu \geqslant \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$.

2.4.31. $Q = mgH + Mmv^2/2\,(M + m)$.

2.4.32. $v = \sqrt{\dfrac{2FL\,(M + m)}{Mm}}$; $Q = FL$.

2.4.33. $v_{\text{mín}} = \sqrt{\dfrac{\mu g l}{2}\,(1 + m/M)}$.

2.4.34*. $x_{\text{máx}} = \dfrac{Mg}{k} + \dfrac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2kH}{(M + m)\,g}}\right)$.

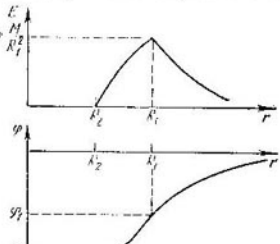
2.4.35. $v = \sqrt{\dfrac{m\,(kx_0^2 - 2\mu m g l)}{M\,(M + m)}}$.

2.4.36. $x_{\text{máx}} = v\sqrt{m/2k}$.

§ 2.5. Gravitación. Leyes de Kepler

2.5.1. $E = 0$, $\varphi = -\gamma M/R$, $r \leqslant R$; $E = \gamma M/r^2$, $\varphi = -\gamma M/r$, $r > R$, donde r es la distancia hasta el centro de la esfera y γ, la constante gravitacional.

2.5.2*. Véase la figura $\varphi_0 = -\dfrac{3}{2}\gamma M\,\dfrac{R_1 + R_2}{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}$, $\varphi_1 = -\gamma M/R_1$.



Respuesta al problema 2.5.2.

2.5.3. $E = \gamma\dfrac{M}{R^3}r$, $\varphi = -\gamma\dfrac{3M}{2R} \times (2 - r^2/R^2)$, $r < R$; $E = \gamma M/r^2$, $\varphi = -\gamma M/r$, $r > R$, donde r es la distancia hasta el centro de la esfera.

2.5.4. $F = 6{,}67 \cdot 10^{-7}$ N; $U = -6{,}67 \cdot 10^{-6}$ J.

2.5.6. $F_0/F_{100} = 1{,}03$; $F_0/F_{1000} = 1{,}3$.

2.5.7. $r \approx 3{,}4 \cdot 10^5$ km.

2.5.8. $F = mg\left[1 - \dfrac{(\omega R \pm v)^2}{gR}\right]$, donde ω es la velocidad angular de la Tierra.

2.5.9. $v_1 \approx 7{,}9$ km/s; $v_2 \approx 11{,}2$ km/s.

2.5.10. $F = 3\gamma Mm/R$, donde γ es la constante gravitacional.

2.5.11. $h \approx 4 \cdot 10^4$ km.

2.5.12*. $v_1 \approx 11{,}1$ km/s; $v_2 \approx 2{,}3$ km/s.

2.5.13. $S \approx 2{,}2$ m.

2.5.14*. $v \approx 5$ km/s.

2.5.15*. $H \approx 6400$ km.

2.5.16*. $v \approx 300$ km/s.

2.5.17*. $v \approx 4{,}3$ km/s.

2.5.18. En 9,3 veces.

2.5.19. $T_T/T_L \approx (M_L R_T/M_T R_L)^{1/2} \approx 0{,}21$.

2.5.20. $M \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg.

2.5.21. $E = -\gamma m_1 m_2/2a$.

2.5.22. $T_1 = 0{,}7$ año.

2.5.23*. $\alpha = \pi/2$

2.5.24. $r = 3 \cdot 10^8$ km.

2.5.25. $F = \dfrac{\gamma M_T m (R_2^2 - R_1^2)}{R_1^2 R_2^2}$.

2.5.26*. $F_I/F_S \approx 2{,}4$.

2.5.27*. a) $h \approx 490$ km; b) $h \approx 497$ km.

2.5.28. $h \approx 55$ km.

2.5.29. $v \approx 7{,}9$ km/s.

2.5.30. $v = \sqrt{3\gamma M/R}$.

2.5.31. $p = m\sqrt{2gR}\,\operatorname{sen}(\alpha/2)$.

2.5.32. $M = m\,\dfrac{p^2 + p_0^2 - 2pp_0\cos\alpha}{p_0^2 - p^2}$.

2.5.33*. $r_{\min} = \sqrt{\rho^2 + 4\gamma^2 m^2/v^4} - 2\gamma m/v^2$

2.5.34*. $M = m\pi R^2 n v_0 (1 + 2gR/v_0^2)\, t$

2.5.35. Describirá una trayectoria elíptica.

2.5.36. $v_2 = v_1 h/l = 54{,}6$ km/s. En el año 4986.

2.5.37*. $t = \pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}\left[\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{R_\pi}{R}\right)\right]^{3/2}$.

2.5.38*. $t \approx 65$ días.

2.5.39*. El primer proyectil. $R_1/R_2 = 2gR/v^2$.

2.5.40*. $\Delta v = \sqrt{\dfrac{\gamma M}{R+h}}\left(\sqrt{\dfrac{2(R+H)}{2R+H+h}} - 1\right)$. $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} \times$

$\times \left(R + \dfrac{H+h}{2}\right)^{3/2}$.

2.5.41*. $R_{\text{máx}} \approx 1{,}4R$.

2.5.42*. $\Delta v \approx 75$ m/s.

2.5.43*. $v \approx 40$ km/s; $\alpha \approx 40°$.

§ 2.6. Rotación de un sólido

2.6.1. $K = mR^2\omega^2/2$. Mayor.

2.6.2. a) $M = \dfrac{mr^2\omega}{\tau}$; b) $M = \dfrac{mr^2\omega^2}{4\pi N}$, $Q = \dfrac{mr^2\omega^2}{2}$.

2.6.3. $t = \omega R/\mu g$. $N = \omega^2 R/4\pi\mu g$.

2.6.4*. $t = 3\omega R/4\mu g$.

2.6.5. La arandela que gira recorrerá mayor distancia.

2.6.6. Es necesario que tiren por turno de los extremos de la astilla perpendicularmente a ella.

2.6.7. $\cos\alpha = \dfrac{g(M-m)}{\omega^2 l(M+m)}$, siendo $\left|\dfrac{g(M-m)}{\omega^2 l(M+m)}\right| \leq 1$; de lo contrario $\alpha = 0$.

2.6.8. $a = Fl/(M+m)$; $\varepsilon = Fl/mR$.

2.6.9. a) $a = \dfrac{1}{2} g \operatorname{sen}\alpha$; $F = \dfrac{1}{2} mg \operatorname{sen}\alpha$. b) $a = {}^2/_3 g \operatorname{sen}\alpha$; $F = {}^1/_3 mg \operatorname{sen}\alpha$.

2.6.10*. $F = {}^1/_2\, mg \operatorname{sen}\alpha$.

2.6.11. $a = g2M/(2M+m)$.

2.6.12. $a_1 = g\,\dfrac{(m_1R_1 - m_2R_2)R_2}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}$, $a_2 = -g\,\dfrac{(m_1R_1 - m_2R_2)R_1}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}$;

$T_1 = m_1 g\,\dfrac{I + m_2R_2(R_1 + R_2)}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}$, $T_2 = m_2 g\,\dfrac{I + m_1R_1(R_1 + R_2)}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}$.

2.6.13. $a = g\dfrac{mr^2}{I + mr^2}$; $T = mg\dfrac{I}{2(I + mr^2)}$.

2.6.14*. $a = g/2$.

2.6.15. $a = \dfrac{(M + m)\, g \operatorname{sen}\alpha}{2M + m}$.

2.6.16*. $\cos\alpha > r/R$, $F \leqslant \dfrac{\mu mg\,(I + mR^2)}{I\cos\alpha + \mu\,(I + mR^2)\operatorname{sen}\alpha + mRr}$.

2.6.17*. $Q/E = 1/2$; $v = \omega R/2$, $S = \omega^2 R^2/8\mu g$. Véase la figura.

Respuesta al problema 2.6.17*.

2.6.18*. $Q/E = 1/3$; $S = {}^5/_{18}v^2/\mu g$; $u = -{}^2/_3 v$.

2.6.19. $t = v/\mu g$.

2.6.20*. $h = \dfrac{\omega^2 R^2(\mu\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{4g\,(3\mu\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}$.

2.6.21. $Q/E = 8/9$.

2.6.22*. $x = \dfrac{R}{8}\left(3\sqrt{3} + \sqrt{16\dfrac{H}{R} - 5}\right)$. A menor distancia.

2.6.23*. $N = mgl^2/(l^2 + 3a^2)$.

2.6.24*. $N = 4Mmgl/(M + m)$.

2.6.25. $n \approx 1$ vuelta.

2.6.26*. $H_1 = \dfrac{2v^2 h\,(R - h)\,(2R - h)}{gR^4}$; $H_2 = \dfrac{9}{16}H_1$.

2.6.27. $\omega = v/2R$.

2.6.28. $\omega_1' = (3\omega_1 - \omega_2)/4$; $\omega_2' = (3\omega_2 - \omega_1)/4$.

2.6.29. $n \approx mv/M$; $\omega \approx 2mvh/MR^2$.

2.6.30. $\omega = 2mvr/(MR^2 + 2mr^2)$.

2.6.31. $\Delta\omega = \omega mR^2/I$; $\Delta E = \omega^2\dfrac{mR^2}{2}\left(1 + \dfrac{mR^2}{I}\right)$.

2.6.32*. $v = \sqrt{3gl}$.

2.6.33. $v = \sqrt{\dfrac{(2m + M)\, gl \operatorname{sen}\alpha}{2\,(m + M)}}$.

2.6.34. $v = \sqrt{2gL^2h^2/(h^2 + 4\pi^2R^2)}$.

2.6.35. $Q = {}^1/_{10}Mv^2$; $u = {}^3/_5 v$.

2.6.36. $\cos\alpha = 1 - \dfrac{3m^2v^2}{gl\,(M + m)\,(4M + 3m)}$.

2.6.37*. A la distancia de ${}^2/_3 l$ de la mano.

2.6.38. $v = 2\sqrt{gl}$.

2.6.39. Los centros de los halterios se moverán en sentidos contrarios a la velocidad $(v_1 - v_2)/2$ cada uno. Los halterios girarán en diferentes sentidos a la velocidad angular $(v_1 + v_2)/l$.

2.6.40*. $h = H\left(\dfrac{3M}{6M + m}\right)^2$.

2.6.41*. $N = \rho R^4\omega^2 v$.

2.6.42*. $F = 2mg\dfrac{2 - 2\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{(2 - \operatorname{sen}^2\alpha)^2}$.

§ 2.7. Estática

2.7.1. a) $T = 98$ N; b) $F = 138$ N.
2.7.2. $F = 0{,}98$ N.
2.7.3. $h \approx 660$ m.
2.7.4*. $S_x = S_0 \exp\{-\rho g x/\sigma_0\}$, donde ρ es la densidad; σ_0, la resistencia mecánica del material; S_x, la sección del edificio a la altura x y S_0, en la base.
2.7.5. Los hilos vecinos forman un ángulo de 120°.
2.7.6. $\alpha > \pi/3$.
2.7.7. $T = mg\,(l + r)/R$.

2.7.8. $m_2 = m_1 \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\,(l/R - \alpha)}$.

2.7.9. $T = 2{,}6$ N; $\alpha = \operatorname{arctg}\, 3\sqrt{3}$.
2.7.10. $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.
2.7.11. $x = 5F/k$.
2.7.12. $l_0 = 2l_2 - l_1$.
2.7.13*. $\operatorname{tg}\alpha = (\mu_1 - \mu_2)/(1 + \mu_1\mu_2)$
2.7.14. $\mu \geqslant \operatorname{tg}(\alpha/2)$.
2.7.15. $\mu = 1/\sqrt{3}$.

2.7.16*. $F_n = \dfrac{2n-1}{\sqrt{3}}\, mg$.

2.7.17. $F = \sqrt{T^2 + (mg)^2/4}$.
2.7.18*. $f_n = F\,(f/F)^n$.
2.7.19*. $T = T_0 e^{-\mu\theta}$.
2.7.20. a) $F_1 = F_2 = 98$ N; b) $F_1 = 24{,}5$ N, $F_2 = 171{,}5$ N.
2.7.21. $m \leqslant 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ kg.
2.7.22. $F_1 = F_3 = Mg/4$; $F_2 = Mg/2$.
2.7.23. No se puede.
2.7.24. $m = 3{,}2$ kg.
2.7.25. $\alpha = \operatorname{arctg}\,(1/3)$.
2.7.26. $\mu \geqslant 1/3$.

2.7.27. $F = \dfrac{\mu mg\cos\alpha}{2\,(\mu\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}$.

2.7.28. $F = {}^1/_4\ Mg\operatorname{ctg}\alpha$.

2.7.30. $F_A = Mg\operatorname{tg}\alpha$; $F_B = Mg\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$.

2.7.31. $F_A = mg\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\,(\beta - \alpha)}$; $F_B = mg\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\,(\beta - \alpha)}$.
2.7.32. $\alpha = \operatorname{arctg} 2\mu$.
2.7.33. $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 1/\mu$.

2.7.34*. $F = mg/2$, $\alpha = 0$, cuando $\mu \geqslant 1/2$; $F = \dfrac{mg}{2\mu}\sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1 - 2\mu}{\mu}$, cuando $\mu \leqslant 1/2$.

2.7.35. $\operatorname{tg}\alpha \geqslant (1 - \mu_1\mu_2)/2\mu_1$.
2.7.36. $m = Mr/(R - r)$.

2.7.37*. $1/3\sqrt{3} \leqslant \operatorname{tg}\alpha \leqslant 1/\sqrt{3}$.

2.7.38*. $F = \dfrac{mg\,(\mu_1 + \mu_2)}{2 + (h/l)\,(\mu_2 - \mu_1)}$.

2.7.39. $\mu \leqslant R\cos\alpha/(R\operatorname{sen}\alpha + r)$.
2.7.40. Es razonable. Si se retira el cable D, la tensión del cable C disminuirá en 7/6 veces.

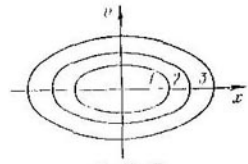
2.7.41. $N_1 = mg/5$; $N_2 = 2mg/5$.
2.7.42*. $m = Ma/R$.
2.7.43. Para $\alpha >$ arcsen (1/6), rodamiento y para $\alpha >$ arctg μ, deslizamiento.
2.7.44. Se desplazará.

Capítulo 3

OSCILACIONES Y ONDAS

§ 3.1. Pequeñas desviaciones del equilibrio

3.1.1. $F = -27x/l$.
3.1.2. $F = -2k \cos \alpha \cdot x$.
3.1.3*. $F(x) = -kx^3/l^2$.
3.1.4. $F = -mgx/R$.
3.1.5. b) $F = -mg \operatorname{sen} \alpha$.
3.1.6. $U = \dfrac{mg\,x^2}{(R-r)\,2}$.
3.1.7. $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{qQ}{l+x} + \dfrac{qQ}{l-x} - \dfrac{2qQ}{l}\right) \approx \dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 l^3}\,x^2$
3.1.8. $F = -kx$; la gráfica de la fuerza sumaria tiene inclinación constante para cualesquiera F.



E_1 E_2 E_3

Respuesta al problema 3.1.15.

3.1.9*. a) $F = -\dfrac{2mg}{R}x$;
b) $R' = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$; $F' = \dfrac{2mg}{R'}\,x$.
3.1.10. $F_x = -m\omega^2 x$; $F_y = -m\omega^2 y$.
3.1.11. $k = m\,(v_0/x_0)^2$.
3.1.13. En $x_0/\sqrt{x_0^2 - x^2}$ veces.
3.1.14*. $v' = nv$; las velocidades de paso aumentan la misma cantidad de veces que las longitudes de los correspondientes segmentos.
3.1.15. El carácter cerrado de las curvas de fase significa que el movimiento es periódico.
3.1.16*. $\sqrt{q^2 + u^2} = \sqrt{2E}$, donde E es la energía total. El punto de fase se mueve por la circunferencia en sentido de las agujas del reloj.
3.1.17. $x = \sqrt{2E/k} \cos \varphi$; $v = -\sqrt{2E/m} \operatorname{sen} \varphi$. $x = A \cos \varphi$; $v = -\sqrt{k/m}\,A \operatorname{sen} \varphi$.

§ 3.2. Período y frecuencia de las oscilaciones libres

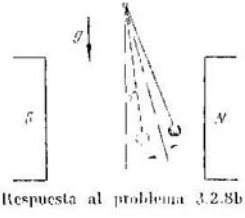
3.2.1. El período se reducirá a la mitad.
3.2.2. $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.
3.2.3. $l = 24{,}4$ cm.
3.2.4. $T = 2\pi\sqrt{l/(g \operatorname{sen} \alpha)}$.

3.2.5. $T = \pi \sqrt{l/g}\,(1 + \sqrt{2}/2)$.

3.2.6. a) $T = 2\pi \sqrt{m/(k_1 + k_2)}$;

b) $T = 2\pi \sqrt{m\,(k_1 + k_2)/k_1 k_2}$;

c) $T = 2\pi \sqrt{m/(k_1 + k_2)}$. El período no depende de la distancia entre las paredes.



Respuesta al problema 3.2.8b.

3.2.7. $T = \pi\,(\sqrt{m/k_1} + \sqrt{m/k_2})$. La relación de las desviaciones máximas a la derecha y a la izquierda es igual a $\sqrt{k_1/k_2}$.

3.2.8. a) $F = mg\,[(T_0/T)^2 - 1]$; b) $F = mg\,\sqrt{(T_0/T)^4 - 1}$, $\cos\varphi = (T/T_0)^2$; aquí φ es el ángulo de la desviación respecto de la vertical de la nueva posición del equilibrio (véase la figura).

3.2.9*. $r \approx 30$ km; para realizar la estimación, el yacimiento se consideró de forma esférica.

3.2.10. $T = m\omega^2 l/2$.

3.2.11. $\omega_1 = \sqrt{qQ/\pi\varepsilon_0 ml^3}$; $\omega_2 = \sqrt{2g/R}$.

3.2.12. a) $t \approx 42$ min; b) $t \approx 42$ min.

3.2.13. $\omega = \sqrt{2\mu g/l}$.

3.2.14*. $T = 2\pi \left(\dfrac{l^2}{g^2 + a^2 - 2ag \operatorname{sen} \alpha} \right)^{1/4}$.

3.2.15*. $T_{\parallel} = \dfrac{2\pi}{\omega} \sqrt{\dfrac{l}{R + l}}$ para las oscilaciones en el plano que pasa por el eje; $T_{\perp} = \dfrac{2\pi}{\omega} \sqrt{\dfrac{l}{R}}$ para las oscilaciones en el plano perpendicular al eje.

3.2.16. $\omega = \sqrt{k/m - \Omega^2}$.

3.2.17. El desplazamiento del peso M y $\approx x^2/2l$, donde x es el desplazamiento del manguito, cuando $x \ll l$ y $\gg x$. La frecuencia de las oscilaciones del manguito es $\sqrt{MF/ml}$, en tanto que la de la carga 2 $\sqrt{MIg/ml}$ puesto que $\cos^2 \omega t = (1 + \cos 2\omega t)/2$.

3.2.18*. $t = \pi \sqrt{m/(2\pi RN\Delta P)}$.

3.2.19. Se reunirán a distancias $\pi\,(n + 1/2)\,r_0 \sqrt{m/k}$ desde el punto O, siendo n un número entero.

3.2.20. El número menor entero de veces más próximo a la magnitud $\dfrac{l}{\pi v_0} \sqrt{\dfrac{g}{R}}$.

3.2.21. $\omega^2 = g\,(Ml - mx)/(Ml^2 + mx^2)$.

3.2.22. $\omega^2 = g/l + k/4m$; el cuadrado de la frecuencia aumenta en $k/4m$.

3.2.23. $M = m\,(g/\omega^2 R - 1)$.

3.2.24. $\omega_{\parallel}^2 = \dfrac{g}{R} \sqrt{1 - \dfrac{l^2}{R^2}}$; $\omega_{\perp}^2 = \dfrac{g}{\sqrt{R^2 - l^2}}$.

3.2.25. $\omega = \sqrt{k/2m}$.

3.2.26*. $\omega^2 = 5g/7\,(R - r)$.

3.2.27. $\omega^2 = k/\mu$, donde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

3.2.28. $\omega_{1R}/\omega_{1R} = \sqrt{3}/2$.

3.2.29*. $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{11/3}$.

3.2.30. $T = 2\pi \sqrt{lM/(M + m)\,g}$.

3.2.31. a) $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$; b) $t = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

3.2.32. $I = I_0[(T/T_0)^2 - 1]$.

3.2.33. $T = 2\pi\sqrt{l/2g}$.

3.2.34*. $T = 2\pi\sqrt{H/g}$.

3.2.35. $\omega = \sqrt{g/H}$.

3.2.36. $m \approx 900$ t.

§ 3.3. Movimiento armónico

3.3.1*. El desfasaje es igual a $\pi/2$ (un cuarto del período), la derivada del valor armónico está desplazada también en $\pi/2$.

3.3.2. $v = -A\omega \operatorname{sen} \omega t$; $a = -A\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$; $k = m\omega^2$.

3.3.3. a) $x = 5 \operatorname{sen} (3{,}13t)$ mm, b) $x = 5 \cos (3{,}13t)$ mm, donde el tiempo (t) está en segundos.

3.3.4. $T = 0{,}06$ s.

3.3.5. $t = \pi/4\omega$.

3.3.6. $T = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$.

3.3.7. $b = a \cos[\pi (T_0 - T)/T_0]$.

3.3.8*. $2R/\pi l$, cuando $l \gg R$; $1/3$, cuando $l = 2R$. Si, aumentará.

3.3.9. $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$ si $v \leq \sqrt{\mu g l}$; si $v \geq \sqrt{\mu g l}$ $t = \frac{v'}{\mu g} + \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \times$ $\times \arccos \frac{v'}{v}$, donde $v' = \sqrt{v^2 - \mu g l}$.

3.3.10. $u = \frac{d}{2\pi n}\sqrt{k/m}$, donde n es un número entero.

3.3.11. $t = T/4 + \tau/2$.

3.3.12. a) $x = \frac{mg}{k}(\cos \omega t - 1)$; b) $x = (mg/k + l)(\cos \omega t - 1)$. El eje x está dirigido verticalmente hacia arriba, el origen de coordenadas se encuentra en la posición inicial.

3.3.13. La velocidad inicial se halla partiendo del principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\dot{x} = \frac{mv}{M + m} \cos \sqrt{\frac{k}{M + m}}\, t; \quad x = \frac{mv}{k(M + m)} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{M + m}}\, t.$$

El eje x está dirigido a lo largo de v.

3.3.14. Desde el instante de la primera colisión durante un semiperíodo transcurre la compresión y el retorno del muelle al estado no deformado. Luego tiene lugar el segundo choque en el instante en que el muelle no está deformado, después de lo cual las bolas comienzan a moverse uniformemente a la velocidad $-v$. En período $T = 2\pi\sqrt{m/2k}$.

3.3.15. $F_{máx} = 2F$; $\tau = T/2$.

3.3.17. $x_0 = \sqrt{A_0^2 + \frac{k^2}{k^2} - \frac{2A_0 F}{k} \cos \omega t_0}$.

Siendo $t_0 = \pi(2n + 1)/\omega$, donde n es un número entero, la amplitud es la máxima; siendo $t_0 = 2\pi n/\omega$, la mínima.

3.3.18*. $x_0 = u\sqrt{m/k}$.

3.3.19*. Cuando $u \geq \mu g\sqrt{m/k}$ comienzan inmediatamente las oscilaciones armónicas con una amplitud de $A = \mu mg/k$; siendo menores las velocidades u se establecen las oscilaciones con una amplitud $A = u\sqrt{m/k}$.

3.3.20*. $\mu = kl/4Mgn$.

3.3.21. $l = g\,(M + m/\omega^2 M$.

3.3.22. $F = -m\omega^2 x = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$; el valor máximo del módulo de la fuerza $m\omega^2 A$ se alcanza en el instante $t = (\pi n - \varphi)/\omega$, donde n es un número entero.

3.3.23. Para $\omega^2 A \geq g$ la carga salta, la separación sucede por encima de la posición media de la membrana.

3.3.24. $A = F/m\omega^2$.

3.3.25. Supongamos que la velocidad inicial es nula y que la losa comienza a elevarse, entonces la altura de ascenso de la carga será

$$h = A + \frac{g}{2\omega^2} + \frac{A^2\omega^2}{2g}.$$

3.3.26*. Con $A = \frac{g}{\omega^2}\sqrt{n^2 n^2 + 1}$, donde n es un número entero.

3.3.27*. La amplitud de la aceleración del extremo $\omega^2 A = 10^6$ m/s^2 es mucho mayor que la aceleración $g \approx 10$ m/s^2, que es la que puede asegurar la fricción. Por esta razón la carga permanece prácticamente en el sitio, sin influir casi sobre la frecuencia. Para la amplitud $A \leq 10^{-14}$ cm la carga se mueve junto con el extremo e influye de modo notorio sobre la frecuencia.

3.3.29*. $v = \mu mg/2\omega \approx 1{,}57 \cdot 10^{-5}$ m/s $\ll \omega A = 10^{-1}$ m/s.

3.3.30*. $n = \frac{\pi r_0 \operatorname{tg} \alpha}{2\mu}$.

§ 3.4. Adición de las oscilaciones

3.4.1. Tiene lugar la adición (superposición) de las oscilaciones armónicas por la horizontal y vertical con frecuencias $\omega_1 = \sqrt{2k_1/m}$ y $\omega_2 = \sqrt{2k_2/m}$. Siendo $k_1 \neq k_2$ los movimientos rectilíneos pueden realizarse sólo en dirección vertical y horizontal.

3.4.2. Para desviar el cuerpo en r con respecto a la posición de equilibrio es necesario en la dirección perpendicular comunicarle la velocidad $v = \omega r$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$. Dentro del período $T = 2\pi/\omega$ el cuerpo regresará a su posición anterior tanto por la vertical como por la horizontal.

3.4.3. $2\varphi = \pi/3$.

3.4.4*. Cuando $2\varphi = \pi n$, donde n es un número entero, aparece un segmento; siendo $2\varphi = \pm\pi/2 + 2\pi n$, una circunferencia. Los semiejes de la elipse son $A\sqrt{2}\cos\varphi$ y $A\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi$.

3.4.5. Una elipse con ejes por la vertical y horizontal.

3.4.6. El segmento por la diagonal se convertirá en una elipse estirada, cuyos semiejes van acercándose; al transformarse en una circunferencia, la elipse empezará a comprimirse hacia la segunda diagonal, etc.; dentro del tiempo $2\pi/\Omega$ todo el ciclo se repetirá.

3.4.7. $T_x : T_y = 1 : 2$, a excepción del caso d) donde $T_x : T_y = 2 : 1$.

3.4.8. Si $T_x : T_y = p : q$, donde p y q son números enteros, pasado el tiempo $pT_y = qT_x$ el punto vuelve a los mismos valores de x e y. Cuando $T_y : T_x \neq p : q$ se obtienen elipses.

3.4.9. $\omega_y : \omega_x = p : q$.

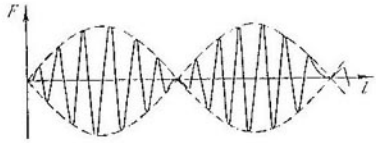
3.4.10*. $\mu = 2T/(M + m_1 + m_2)$.

3.4.11*. La tensión varía según la expresión $F = k[A_2\cos(\omega t + \varphi_2) - A_1\cos(\omega t + \varphi_1)]$. La energía máxima es el doble del valor medio; la energía media del muelle será

$$E_{\text{med}} = \frac{k}{4}[A_2^2 + A_1^2 - 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)].$$

Para $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ la energía media es la máxima; para $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, la mínima.

3.4.12*. La tensión será $F = 2kA \operatorname{sen} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \operatorname{sen} \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t$. La energía media valdrá $E_{\text{med}} = \frac{k}{4}(A_1^2 + A_2^2)$. Los latimientos se dan en la figura.



Respuesta al problema 3.4.12*.

3.4.13. $N = \frac{F_0 A \omega}{2} \operatorname{sen} \varphi$.

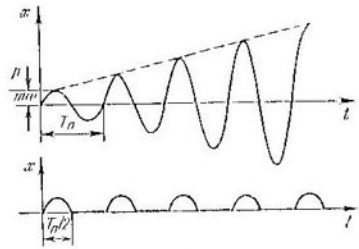
3.4.14. a) $\omega = \sqrt{k/m}$; b) $\omega = \sqrt{3k/m}$.

3.4.15*. $k = m(\omega^2 - \omega_0^2)/2$.

3.4.16. $A_{1,2} = \frac{A \pm B}{2}$; $\omega_{1,2} = \frac{2\pi}{\tau} \pm \frac{\pi}{T}$.

§ 3.5. Oscilaciones forzadas y amortiguadas

3.5.2. Véase la figura; $\omega = 2\pi/T_0$.



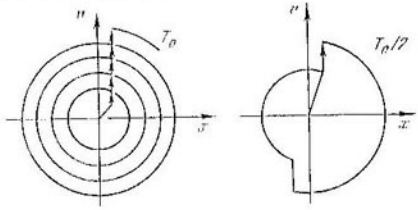
Respuesta al problema 3.5.2.

3.5.3*. Véase la figura. Para T_0 la amplitud $A_n = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{np}{m\omega}\right)^2 + x_0^2}$; para $T_0/2$ la amplitud $A_n = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{p}{m\omega}\right)^2 + x_0^2}$, siendo n impares, $A_n = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2}$, siendo n pares; $\omega = 2\pi/T_0$.

3.5.4. Unos 63 cm.

3.5.5. Hay menos baches en la parte de la entrada.

3.5.6. Incluso golpes no fuertes a ritmo de las oscilaciones propias conducen también a su intensificación fuerte. La variación del rumbo y de la velocidad cambia la frecuencia de los golpes.

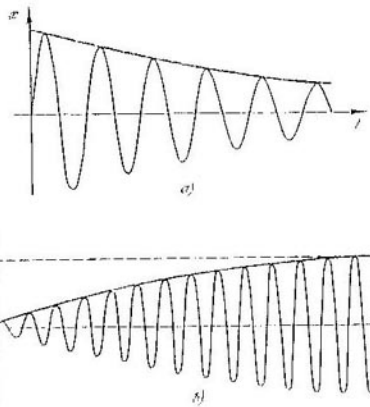


Respuesta al problema 3.5.3*.

3.5.7. Al crecer la amplitud, aumentan las pérdidas por cada período. Cuando éstas se vuelven iguales al incremento de energía a causa de los golpes, la intensificación posterior cesa.

3.5.8. $N = hv^2$.

3.5.9*. $\frac{d}{dt}\left(\frac{kx^2}{2}+\frac{mv^2}{2}\right) = -hv^2$, de aquí $m\frac{dv}{dt} = -kx-hv$.



Respuesta al problema 3.5.10.

3.5.10. Véase la figura. a) Después de un golpe unitario transcurre el amortiguamiento de las oscilaciones. b) En caso de golpes periódicos primero transcurre la intensificación de las oscilaciones, y luego, cuando el incremento

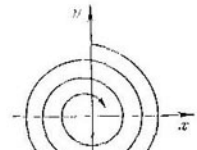
de la energía $\sim pv$ se hace conmensurable con las pérdidas durante un período que son $\sim bv^2T$, las oscilaciones se vuelven estacionarias.

3.5.13. Cuando $\gamma \approx \omega_0$.

3.5.14. Será menor que la velocidad inicial n^2, n^3 veces.

3.5.15. Durante τ_2 la energía se reduce a un cuarto. Durante $\tau_2/2$ la energía se reducirá a la mitad.

3.5.16. Véase la figura.



Respuesta al problema 3.5.16.

3.5.17*. Si el impulso se efectúa en el instante de tiempo t_1, tendremos

$$x = \frac{v_1}{\omega} \exp\{-\gamma(t-t_1)\} \operatorname{sen} \omega (t-t_1).$$

Eligiendo adecuadamente v_1 y t_1, pueden satisfacerse cualesquiera condiciones iniciales, y la expresión para x se reducirá a la forma, dada en el texto del problema.

3.5.18. $\gamma = 10^2\ s^{-1}$, $\omega = \pi \cdot 10^3\ s^{-1}$, $\omega_0 = \pi \cdot 10^3\ s^{-1}$. Al sustituir ω por ω_0, el error depende de modo cuadrático de la magnitud pequeña γ/ω_0.

3.5.19. a) $\gamma \approx 10^{-2}\ s^{-1}$; b) $\gamma' = \gamma/4$.

3.5.20*. a) $Q = \omega_0/2\gamma$; $n = Q/2\pi$. b) Aproximadamente 50 veces para $Q = 10^3$ y sólo 1,5 veces para $Q = 10^6$.

3.5.21*. $v = \dfrac{p}{m} \dfrac{1}{1-\exp(-2\pi\gamma/\omega)}$. Para $2\pi\gamma/\omega \gg 1$ $v \approx p/m$; para $2\pi\gamma/\omega \ll 1$ $v \approx p\omega/2\pi\gamma m$.

3.5.23. $A = F_0/m\omega^2$.

3.5.25. a) Las oscilaciones del sistema son vibraciones libres de un cuerpo, sujeto a los muelles de rigideces k_1 y k_2. La frecuencia de semejantes oscilaciones $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m} > \omega_0$. Siendo la amplitud de las oscilaciones A, la amplitud de la fuerza por parte del segundo resorte será igual a k_2A, de modo que $A = F_0/k_2$. Del planteamiento del problema se sabe ω, y $k_1 = m\omega_0^2$. Por eso $k_2 = m(\omega^2 - \omega_0^2)$. Entonces

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t, \quad A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

El movimiento queda definido solamente por las condiciones iniciales y por la fuerza que actúa sobre el cuerpo, independientemente, del carácter de su fuente. Por eso se resuelve al mismo tiempo el problema sobre las oscilaciones forzadas con $\omega > \omega_0$.

b) $\Delta m = (\omega_0^2/\omega^2 - 1)\, m$, $A = F_0/m(\omega^2 - \omega_0^2)$. Coincidirá.

3.5.26*. $A = F_0/m(\omega^2 - \omega_0^2)$. B y φ se eligen de manera que en el instante nulo se cumplan las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

3.5.27*. $x_0 = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$, $v_0 = 0$; entonces $B = 0$.

3.5.28*. La aceleración complementaria, relacionada con las oscilaciones libres, multiplicada por la masa del oscilador, es igual a la fuerza interna adicional.

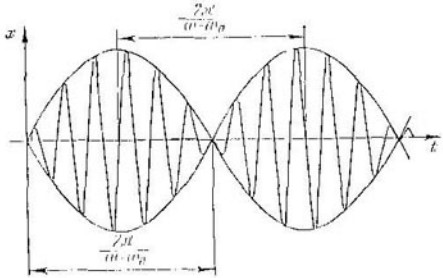
3.5.29. Las oscilaciones forzadas, con una frecuencia inferior a la propia, pueden representarse como oscilaciones libres en ese mismo muelle con una masa adicional fijada al cuerpo. La fuerza por parte de dicha masa es precisamente la motriz. Está dirigida contra la fuerza elástica, o sea, en dirección del desplazamiento. Las oscilaciones con una frecuencia mayor que la frecuencia propia pueden representarse como vibraciones libres de este cuerpo con el muelle adicional fijado a él. La fuerza por parte de dicho muelle es la motriz y está dirigida contra el desplazamiento.

3.5.31*. $x(t) = \dfrac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \dfrac{\omega - \omega_0}{2} t \operatorname{sen} \dfrac{\omega + \omega_0}{2} t$. Véase la figura.

3.5.32*. $x(t) \approx \dfrac{F_0 t}{m(\omega+\omega_0)} \operatorname{sen} \dfrac{\omega+\omega_0}{2} t$.

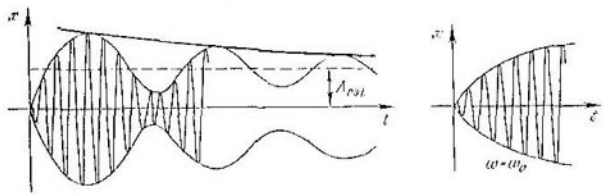
3.5.33*. $x(t) = \dfrac{F_0 t}{2m\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t$.

3.5.34*. Cuando $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ los batimientos que surgen primero pasan a ser paulatinamente oscilaciones forzadas debido a la disminución $\sim e^{-\gamma t}$



Respuesta al problema 3.5.31.

del sumando con frecuencia ω_0. Cuando $\omega = \omega_0$ la intensificación de las oscilaciones inicial con amplitud casi $\sim t$ disminuye suavemente y se establecen las oscilaciones forzadas. El tiempo característico en establecerse es igual al tiempo



Respuesta al problema 3.5.34*.

de amortiguamiento de las oscilaciones libres $\tau = 1/\gamma$ en que su amplitud disminuye e veces.

3.5.35. a) $F = -2A\gamma m\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t - \varphi)$; b) $A = -F_0/2\gamma m\omega_0$; en $\omega_0/2\gamma$ veces.

3.5.36. $\gamma = F_0/2\pi_0\omega m$.

3.5.37. $\omega_0 = 550\ s^{-1}$, $\gamma = 50\ s^{-1}$, $Q = 5{,}5$.

3.5.38. Unos $2 \cdot 10^5$ s.

3.5.39. $v = \omega_0\lambda/2\pi$.

3.5.40*. $v = \dfrac{F_0}{m\omega}(1 - \cos \omega t)$; la velocidad media $v_m = F_0/m\omega$; la velo-

cidad máxima $2F_0/m\omega$ se alcanzará a distancias $\frac{F_0}{m\omega^2}(2n+1)$ de la fuente, donde n es un número entero.

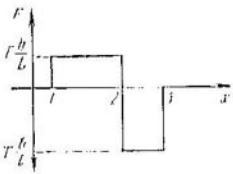
Para las partículas emitidas en el instante π/ω la velocidad $v = \frac{F_0}{m\omega} \times (\cos \omega t - 1)$; la velocidad media $v_{iv} = -F_0/m\omega$; la velocidad máxima $2F_0/m\omega$ se alcanzará a la misma distancia, pero de la otra parte de la fuente.

Para las partículas emitidas en el momento $\pi/2\omega$ la velocidad $v = -\frac{F_0}{m\omega} \operatorname{sen} \omega t$, la velocidad media es nula; la velocidad máxima $F_0/m\omega$ se alcanzará a la distancia $F_0/m\omega^2$ de la fuente.

3.5.41*. Una cicloide; la velocidad media $F_0/m\omega$ está dirigida por el eje x. Si para $t = 0$ $v_x = -F_0/m\omega$ y $v_y = 0$, la partícula se moverá por una circunferencia de radio $F_0/m\omega^2$.

§ 3.6. Deformaciones y tensiones. Velocidad de las ondas

3.6.1. F/k; $(N-1)\,F/k$.
3.6.2. Aumentará en 10^{-11} m.
3.6.3. $k = ES/L$; $F = ES\ (\Delta L/L)$.
3.6.4. $k = Ea$.
3.6.5. $l = 3$ mm.
3.6.6. De 10^8 a $0{,}5 \cdot 10^9$ Pa.
3.6.7. $P = 5 \cdot 10^4$ N.
3.6.8. En $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m.
3.6.9. $w = Ee^2/2 = \sigma^2/2E$.
3.6.10*. $A = \frac{\pi^2}{6}\frac{Ea^4}{l}$.
3.6.11*. $\Delta x_1/\Delta x_{\|} = k_1/(2k_0 + k_1)$.
3.6.12. Aumenta. $\mu \approx 0{,}5$.
3.6.13*. $\varkappa = 3\,(1 - 2\mu)/E$.
3.6.14. Aumentaría aproximadamente en 30 m. La densidad es mayor en 50 kg/m³. La energía en unidad de volumen es de $2{,}5 \cdot 10^6$ J/m³.



Respuesta al problema 3.6.16.

3.6.15. La componente horizontal de la tensión es igual a T; basándose en la inclinación de cada parte del hilo se buscan las componentes verticales y ya haciendo uso de ellas, las fuerzas necesarias.

3.6.16. Véase la figura; $F = T\varepsilon$. Las fuerzas se aplican a los puntos de inflexión. $F_1 = -Tb/L$; $F_2 = T\,(b/L + b/l)$; $F_3 = -Tb/l$.

3.6.17. $u = -c\varepsilon$.

3.6.18. a) $dp/dt = -\mu c^2 \varepsilon$. b) $F = T\varepsilon$; $c = \sqrt{T/\mu}$.

3.6.19. a) $\varepsilon = -b/L$, $w = Eb^2/2L^2$; $u = -c\varepsilon = cb/L$. b) $c = \sqrt{E/\rho}$.

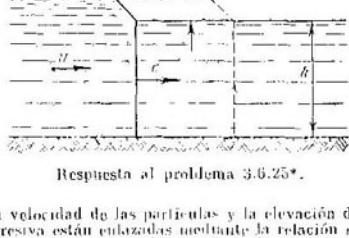
3.6.20. a) $dp/dt = \rho c u S = -\rho c^2 \varepsilon S$. b) $\sigma = -E\varepsilon$, $c = \sqrt{E/\rho}$.

3.6.21. $c = 5$ km/s. Destaquemos mentalmente una barra en la hoja. Las secciones vecinas «estorban» a sus desplazamientos transversales. La rigidez de semejante barra es mayor que la de la barra con la superficie lateral libre.

3.6.22. $c = 500$, 1400, 340 m/s.

3.6.23. $c^2 = p\,(P - P_0)/\rho_0\,(\rho - \rho_0)$.

3.6.24*. En caso de compresión, que decrece suavemente hacia el frente, la velocidad del sonido es mayor en los tramos más alejados, las perturbaciones alcanzan una a la otra. En caso de rarefacción la velocidad del sonido en los tramos alejados es menor, éstos se retrasan y la perturbación se disipa.



Respuesta al problema 3.6.25*.

3.6.25*. La velocidad de las partículas y la elevación del nivel del agua en la onda progresiva están enlazadas mediante la relación $u/c = \Delta h/h$. Igualemos la velocidad de la variación del impulso y la diferencia de las fuerzas de presión: $\rho hcu = \rho g h \Delta h$. De aquí $c = \sqrt{gh}$.

3.6.26*. $c = \dfrac{\omega l}{2\,\mathrm{arcsen}\,(\omega/2\omega_0)}$. Para $\omega \ll \omega_0$, $c = a_0$; $2\omega_0 \approx 10^{14}$ Hz.

§ 3.7. Propagación de las ondas

3.7.1. $p = \rho c b S$.

3.7.2. a) $q_p = \Delta\rho c^2$. b) $v = \dfrac{\Delta\rho c}{\rho}\dfrac{l}{L}$, $x = \dfrac{\Delta\rho}{\rho} l$.

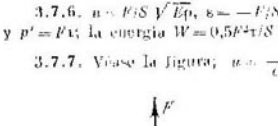
3.7.3. $P(t - r/c)$, donde r es la distancia hasta el captador.

3.7.4. La densidad del flujo del impulso $q_p = \rho c u\,(x_0 - ct)$.

3.7.5. $F = 1400$ N.

3.7.6. $n = F/S\sqrt{E\rho}$, $\varepsilon = -F/SL$, $\rho' = \rho\,(1 + F/SE)$. El impulso $p = 0{,}5F\tau$ y $p' = F\tau$; la energía $W = 0{,}5F^2\tau/S\sqrt{E\rho}$ y $W' = F^2\tau/S\sqrt{E\rho}$.

3.7.7. Véase la figura; $u = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}\dfrac{F}{\rho}$, $c_1 = \sqrt{T/\mu_1}$, $c_2 = \sqrt{T/\mu_2}$.



Respuesta al problema 3.7.7.

3.7.8. Las fuerzas verticales $F_{1,2} = -(\mu v^2 - T)\,b/L$ y $F_2 = 2\,(T - \mu v^2)\,b/L$. Cuando $v \to \sqrt{T/\mu}$ las fuerzas tienden a cero y la cuerda «no se opone» a la flexión.

3.7.9. Las velocidades de las ondas de «flexión» y de la perturbación coinciden, lo que conduce a un brusco aumento de la amplitud de las ondas. Ello a su vez puede conducir al estallido del neumático.

3.7.10. Las velocidades de la lancha y de la onda excitada por la lancha en el río, coincidieron.

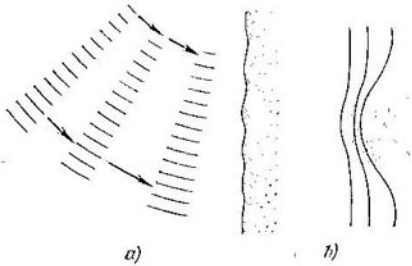
3.7.13. El frente es plano. La dirección de la propagación forma un ángulo α con la normal a la superficie de separación ($\operatorname{sen}\alpha = c/v$).

3.7.14. $\alpha_1 = \alpha$, $\operatorname{sen}\alpha_2 = (c_2/c_1)\operatorname{sen}\alpha$. Las longitudes de ondas están en la misma relación que las velocidades del sonido.

3.7.15. El ruido de los motores se propaga con más lentitud que el frente de la onda de choque, creada por el supersónico.

3.7.16. $\operatorname{sen} \alpha_0 = c_1/c_2$.

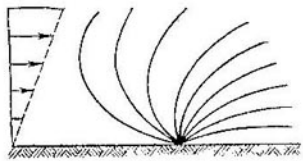
3.7.17. Cambia la dirección solamente de la onda refractada. $\operatorname{sen} \alpha_2 = \dfrac{c_2 \operatorname{sen} \alpha_1}{c_1 + v \operatorname{sen} \alpha_1}$, donde c_1 y c_2 son las velocidades del sonido en el aire y en el agua, v, la velocidad del aire y α_1, el ángulo de incidencia.



Respuesta al problema 3.7.18.

3.7.18. a) Las partes del frente más alejadas de la orilla se mueven con mayor velocidad. Por eso el ángulo entre el frente de la onda y la orilla disminuye. b) Véase la figura.

3.7.19*. En la superficie de separación de las profundidades puede tener lugar la reflexión interna total.



Respuesta al problema 3.7.20.

3.7.20*. Véase la figura. En dirección del viento el sonido se propaga casi a lo largo de la superficie terrestre, mientras que en sentido contrario se va de ésta.

3.7.21. $v = v_0/(1 - v/c)$.

3.7.22. $v_1 = v_0 (1 \pm v/c)$; $v_2 = v_0 [1 - (v/c) \cos \alpha]$.

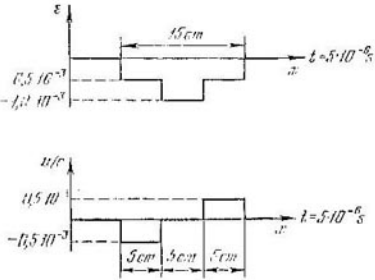
§ 3.8. Adición y reflexión de las ondas

3.8.1. a) La energía cinética será nula y la potencial, $2W$. b) La energía cinética será $2W$ y la potencial, nula.

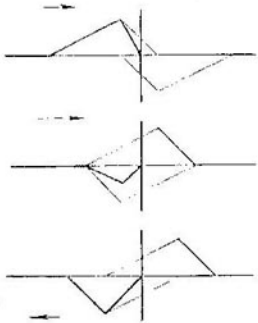
3.8.2. Surgirán ondas dispersadas de deformación con $\varepsilon = -0{,}5 \cdot 10^{-3}$. Véase la figura.

3.8.3. Véase la figura.

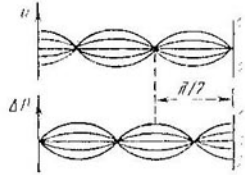
3.8.4. Véase la figura. $P = 2\rho c\omega A \cos \omega t$. La longitud de la onda $\lambda = 2\pi c/\omega$. En la proximidad de la pared se halla el nodo de la velocidad y el



Respuesta al problema 3.8.2.



Respuesta al problema 3.8.3.



Respuesta al problema 3.8.4.

vientre de la presión. El primer nodo de la presión se encuentra a una distancia $\lambda/4$ de la pared.

3.8.5. Véase la figura. En la onda «no volcada» de desplazamientos el signo de la deformación es contrario al de la deformación de la onda incidente.

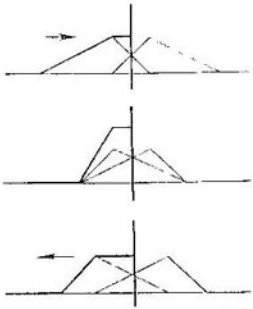
3.8.6. $A = v_0/2\omega$. En el extremo de la barra se encuentran el vientre de la velocidad y el nodo de la presión. El primer nodo de la velocidad está a $\lambda/4$ del extremo de la barra (véase la figura).

3.8.7. Cuando la onda se refleja de la superficie interior del cristal, surge una zona de alta tensión (dilatación) a cierta distancia de esta superficie.

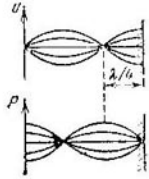
3.8.8*. $u = 2P/\rho c = 250$ m/s; $l = c\tau/2 = 1$ cm.

3.8.9*. $l = \frac{1}{2}\left(L - \frac{c}{\omega} \operatorname{arc\,sen} \frac{\sigma}{\sigma_0}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{\sigma}{\sigma_0}\right)$. Para $\sigma_0 \gg \sigma$, $l = L/2$; para $\sigma_0 \approx \sigma$, $l = L/4$.

3.8.10. $P = \rho cu = 3{,}9 \cdot 10^4$ atm. La fuerza, aplicada al extremo de la barra por parte de la pared, origina una onda de compresión. Al alcanzar el extremo libre, ella se reflejará. La onda reflejada es una onda de dilatación. Durante la superposición de la onda reflejada y la onda, engendrada por la fuerza que ejerce la pared, la deformación se elimina y la velocidad de las secciones da



Respuesta al problema 3.8.5.



Respuesta al problema 3.8.6

la barra varía de signo. Cuando el frente de la onda reflejada alcanza la pared, toda la barra resulta estar no deformada y el contacto desaparece. El tiempo de contacto $\tau = 2l/c = 4 \cdot 10^{-4}$ s.

3.8.11*. Introduzcamos la velocidad del movimiento del plano de contacto de las barras. En los sistemas de referencia, donde las barras estaban inicialmente en reposo, examinemos las ondas, originadas por el movimiento de los extremos que chocaron, y las ondas, reflejadas de los extremos libres. Las deformaciones desaparecen simultáneamente, así como desaparece en este caso el contacto. Cuando la relación de las longitudes de las barras no es igual a la relación de las velocidades del sonido, una de las barras permanecerá deformada al desaparecer el contacto. En este caso el choque no es absolutamente elástico, ya que la energía interna después de eso aumentó.

3.8.12*. $u_{ref} = \dfrac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} u_1$, $u_2 = \dfrac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} u_1$. No, ya que $u_1 + u_{ref} = u_2$. Para $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ el signo de la velocidad en la onda reflejada cambia.

3.8.13. $D = \dfrac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} \approx \dfrac{4\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-7}$

3.8.14. La presencia de la junta aumenta la potencia que pasa desde 0,25 hasta 0,41 de la incidente. Además aparecen los «ecos» con un intervalo de tiempo $2l/c$, cuya potencia decrece en progresión geométrica. Siendo la señal incidente prolongada, por ejemplo, sinusoidal, los «ecos» se adicionan, entonces, eligiendo el grosor l de la junta, puede lograrse el paso casi total o la reflexión completa.

3.8.15*. $F = 2L^2 \rho c v$. Cuando $\omega \ll c/L$ transcurre una nivelación casi completa de la presión a causa de la corriente del aire, por eso la radiación es débil.

3.8.16. $W = 4\pi^2 R^2 \omega A^2 \rho c$. La amplitud de la presión en la onda es inversamente proporcional a la distancia hasta el centro de la esfera. Mientras que en caso de la corriente radial del líquido incompresible la presión excesiva es inversamente proporcional al cuarto grado de dicha distancia.

3.8.17*. a) $u = -\frac{f_0}{2S\rho c}\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$, donde r es la distancia hasta la fuente. La deformación es $\varepsilon = \mp u/c$, los signos $\mp$ son para la radiación a la derecha y a la izquierda, respectivamente. b) Entre las fuentes se encuentra una onda estacionaria

$$u = -\frac{f_0}{S\rho c}\cos\omega\left(t - \frac{l}{2c}\right)\cos\frac{\omega r}{c},$$

fuera de ellas, ondas progresivas

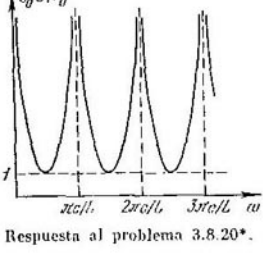
$$u = \frac{f_0}{S\rho c}\cos\frac{\omega l}{2c}\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

donde r es la distancia hasta el punto medio entre las fuentes. Para l igual a un número entero de longitudes de ondas, la potencia es la máxima, para el número de semiondas impar, la potencia es nula. La potencia queda definida no sólo por la fuerza, sino por la velocidad del punto de aplicación de la fuerza, pero esta velocidad depende también de las demás fuentes.

3.8.18*. Para $l = (1/4 + n)\lambda$, para $l = (3/4 + n)\lambda$; $\lambda = 2\pi c/\omega$.

3.8.19. $L = 2\lambda$, $\varepsilon = L\omega/4\pi$.

3.8.20*. a) Los nodos de las tensiones se hallan a distancias múltiples a $\lambda/2$ del extremo libre. $F_0 = \sigma_0 S\,|\operatorname{sen}(\omega L/c)|$. b) Véase la figura; $\omega = 2\pi nc/2L$, donde n es un número entero.



Respuesta al problema 3.8.20*.

3.8.21. $\nu_n = n \cdot 2500$ Hz. Se reducirá a la mitad.

3.8.22*. $A = A_0|\operatorname{sen}(\omega L/c)|$. $\tau \approx 2\pi/\omega\,|\operatorname{sen}(\omega L/c)|$.

3.8.23. $\nu = c/2L = 8{,}25$ Hz.

3.8.24. Al variar la altura de la columna de aire, surgen oscilaciones de resonancia.

3.8.25. A la profundidad de 50, 250, 450 m, etc.

3.8.26. Para obtener un amplio juego de frecuencias propias. El tono se reduce al aumentar las dimensiones.

3.8.27. En el sonido de la voz figuran las oscilaciones propias del aire. Las longitudes correspondientes de las ondas son invariables, mientras que las frecuencias aumentan al crecer la velocidad del sonido. El tono general de la voz se elevará. En tanto que la frecuencia de las oscilaciones del diapasón no cambia y el sonido tendrá la misma frecuencia.

3.8.28. $T = 4l^2\nu^2\mu = 144$ N.

3.8.29. En las inmediaciones de los vientres de los desplazamientos a la distancia $L/6$ ó $L/2$ de los cabos de la cuerda.

3.8.30. Debido a la fricción durante el deslizamiento surgirán grandes pérdidas. Éstas son mínimas para el centro, donde está el nodo de las velocidades, y máximas para los extremos, donde se halla el vientre de las velocidades.

3.8.31*. Las pérdidas principales están relacionadas con el escape de la onda a través de la superficie de separación zafiro—aire. El coeficiente de paso $D = 4\rho_a c_a/\rho_z c_z \approx 10^{-4}$ y nos da la relación entre las pérdidas de energía durante un período y a energía de las oscilaciones. Las pérdidas aumentarán aproximadamente 10^4 veces.

Capítulo 4

MECÁNICA DEL LÍQUIDO (FLUIDO)

§ 4.1. Presión del líquido

4.1.2. $F = 2000\sqrt{2}$ N. Cero

4.1.3. $P = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\dfrac{F}{a^2}$.

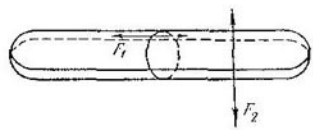
4.1.4. Sí.

4.1.5. $F = 2\pi r^2 P$.

4.1.6. $F = \pi (R^2 - r^2) P$.

4.1.7*. $\sigma = \dfrac{R}{2\Delta} P$.

4.1.8. La fuerza F_1 que actúa por unidad de longitud del perímetro de la sección transversal de la salchicha es menos que la fuerza F_2 que actúa por unidad de longitud del perímetro de la sección longitudinal de la misma.



Respuesta al problema 4.1.8

4.1.9. A la distancia $l = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}\, a$ del centro de la varilla.

4.1.10. $h = 727$ cm.

4.1.11. $F_{\text{inf}} = 4392$ N. $F_{\text{sup}} = 4314$ N. $F_{\text{int}} = 4353$ N. $F = 78$ N.

4.1.12*. $F = {}^1/_{12}\rho g a^2 (3\sqrt{3}\, h - \sqrt{2}\, a) + {}^1/_4 Pa^2\sqrt{3}$.

4.1.13. Las componentes paralela y perpendicular con respecto al fondo de la fuerza son:

$$F_{\parallel} = a^3 (\rho - \rho_0) g \operatorname{sen}\alpha, \quad F_{\perp} = a^2 \rho_0 g \left(\frac{\rho}{\rho_0} \cos\alpha + {}^1/_2 \operatorname{sen}\alpha + h/a \right) + Pa^2.$$

4.1.14. $x = l - \dfrac{R^2}{r^2}\left(1 + \dfrac{a}{r}\right)\left(\dfrac{\rho}{\rho_0} - 1\right) h$.

4.1.15. $h = 85$ cm.

4.1.16. $h = 10{,}1$ m

4.1.17*. $m = {}^1/_3\, \pi R^3 \rho$.

4.1.19. $A = \pi r^2 \left(h + \dfrac{1}{2}\, l\, \dfrac{r^2}{R^2} \right) \rho g l$.

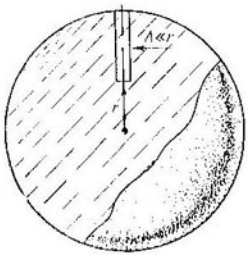
4.1.20*. La presión P_r puede determinarse de la condición de equilibrio para el volumen cilíndrico fino destacado en la figura. La fuerza de atracción

del mencionado volumen de líquido hacia el centro del planeta es igual a la presión que actúa sobre la sección inferior del volumen. $P_r = {}^2/_3\ \pi\gamma\rho^2\ (R^2 - r^2)$; $P_0 = {}^2/_3\ \pi\gamma\rho^2 R^2$.

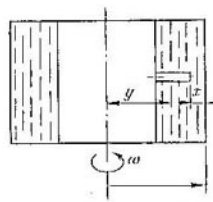
4.1.21. En dirección del vector de aceleración.

4.1.22. $\beta = \alpha - \operatorname{arctg} \mu$.

4.1.23*. La presión $P(x)$ puede buscarse partiendo de la condición que la fuerza de presión sobre la sección interna del volumen cilíndrico fino, destacado



Respuesta al problema 4.1.20*



Respuesta al problema 4.1.23*.

en la figura, es igual a $m\omega^2 y$, donde y es la distancia desde el centro del cilindro hasta el eje de rotación; m, la masa del volumen destacado. $P(x) = {}^1/_2\ \rho\omega^2\ [(R - x)^2 - {}^1/_4\ R^2]$, $x \leqslant {}^1/_2\ R$

4.1.24. $y = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{\omega^2}{g}\ x^2$.

§ 4.2. Flotación. Principio de Arquímedes

4.2.1. $P = mgIS + P_0$.

4.2.2. $x = \dfrac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\ h$.

4.2.3. $x = (m - h\rho_1 S)/S\ (\rho_2 - \rho_1)$.

4.2.4*. Si al girar el paralelepípedo alrededor de su eje que pasa por el punto O, el centro de gravedad del sistema líquido—paralelepípedo se eleva, la posición del paralelepípedo es estable. Esta condición se cumple cuando

$$a/b > \sqrt{6\,\frac{\rho}{\rho_0}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)}.$$

4.2.5. $A = 32{,}5$ J.

4.2.6. $V = 147$ cm^3.

4.2.7. $\rho = 1{,}5$ g/cm^3.

4.2.8. $n = \rho_1/\rho_2$.

4.2.9*. $x = 4m/\pi\rho\ (d_1^2 + d_2^2)$.

4.2.10. $F = 9{,}8 \cdot 10^{-3}$ N.

4.2.11. $F = \dfrac{2}{3}\ \pi r^3 \rho g\left(1 + 2\,\dfrac{r}{l}\right)$.

4.2.12. $F = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ N.

4.2.13. $\rho = (2/3)$ g/cm^3.
4.2.14. $F = mg/\sqrt{3}$.
4.2.15*. a) $F = \rho g R\,(H + L^2/2)^2$. b) $F = 1/2\rho g l\,(H + R)^2$.
4.2.17. $m = 520$ g.
4.2.18*. $m = 4/3\,\pi\,(R^2 - r^2)^{3/2}\,\rho$

Respuesta al problema 4.2.4*

4.2.19*. $m_1 = 1/24\,\rho a^3\,(6 + 5\,\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}^3\,\alpha)$; $m_2 = 1/24\,\rho a^3\,(6 - 5\,(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\,\alpha)$.

4.2.20*. $T = \dfrac{\sqrt{3}}{18}\,mg$.

4.2.21. $Q = \pi r^2 \rho g h H \left[1 + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{h}{H}\,\dfrac{\rho}{\rho_0}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)\right]$.

4.2.22. $Q = 4/3\,\pi R^3 H \rho g = 410$ J, la densidad del agua $\rho = 10^3$ kg/m^3.
4.2.23. $A = 283$ kJ.

4.2.24*. a) Podrá. $\rho = \left(1 - \dfrac{l}{2R - 2H - \Delta + l}\right)\left(1 - \dfrac{\Delta}{l}\right)$ g/cm^3.

4.2.25. $F = 4/3\pi r^3\,(R - r)\,(\rho - \rho_0)\,\omega^2$

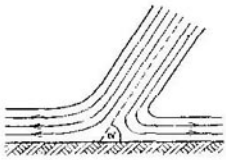
4.2.26. $\omega = \sqrt{\dfrac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R - (l + r)\,\mathrm{sen}\,\alpha}}$.

§ 4.3. Movimiento del líquido perfecto

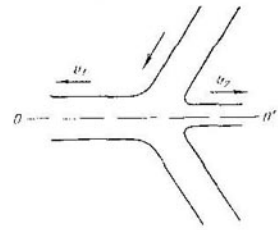
4.3.1. 28,0; 27,3; 26,5 m/s. A 12° piso.
4.3.2. $\Delta T = 2gh\rho S$.
4.3.3. $N = \rho Q\,(gh + Q^2/2S^2)$
4.3.4. a) Debido a la diferente presión en las zonas *1* y *2* sobre el líquido en la zona entre *1* y *2* actúa una presión en sentido del movimiento del líquido. Dicha fuerza de presión supera a F.
b) $F = 1/2\,\rho v^2 S_1\,(1 - S_2/S_1)^2$
4.3.5. En el recipiente $P = P_0 + \rho g x$; en el tubo $P = P_0 + \rho g\,(x - H)$.
4.3.6. $F = \sqrt{2}\,(P + \rho v^2)\,S$.
4.3.7. $v = \sqrt{2FS/\rho\,(S^2 - s^2)}$.
4.3.8. $x = 5l$.
4.3.9. $h = \dfrac{1}{2g}\left[v^2 - \left(\dfrac{mg}{\rho n S N}\right)^2\right]$.
4.3.10*. Las dimensiones de la sección longitudinal del chorro aumentarán al doble. Las velocidades de las secciones semejantes en el chorro aumentarán $\sqrt{2}$ veces. Por eso el desagüe aumentará $2\sqrt{2}$ veces.

4.3.11*. Los chorros serán semejantes. Las dimensiones del chorro, al reducirse el nivel de agua, disminuirán H/h veces, las velocidades de las secciones semejantes en el chorro disminuirán $\sqrt{H/h}$ veces. Por eso el desagüe disminuirá $(H/h)^2\sqrt{H/h} = (H/h)^{5/2}$ veces.

4.3.12. En el plano se conserva la energía de las secciones del chorro, destacadas en la figura, y su impulso sumario a lo largo del plano. Partiendo del



Respuesta al problema 4.3.12.



Respuesta al problema 4.3.13*.

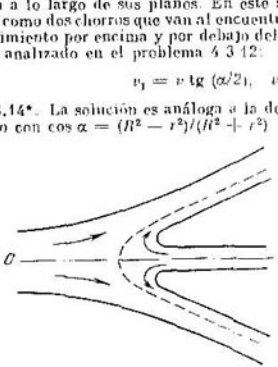
principio de conservación de la energía, se deduce que las velocidades de dichas secciones en el plano serán iguales a v, y del principio de conservación del impulso se desprende que

$$h_1 = h\,(1 + \cos\alpha)/2, \quad h_2 = h\,(1 - \cos\alpha)/2.$$

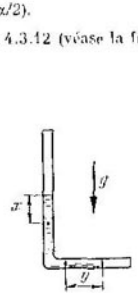
4.3.13*. Es necesario pasar al sistema de referencia donde las placas se mueven a lo largo de sus planos. En este sistema el material de las placas se moverá como dos chorros que van al encuentro, como viene mostrado en la figura. Su movimiento por encima y por debajo del plano OO' repite el movimiento del chorro, analizado en el problema 4.3.12:

$$v_1 = v\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2), \quad v_2 = v\,\mathrm{ctg}\,(\alpha/2).$$

4.3.14*. La solución es análoga a la del problema 4.3.12 (véase la figura). Un cono con $\cos\alpha = (R^2 - r^2)/(R^2 + r^2)$



Respuesta al problema 4.3.14*



Respuesta al problema 4.3.16*.

4.3.15. El problema se reduce al problema 4.3.14*, si se pasa al sistema de referencia en el que las velocidades opuestas del blindaje y del chorro de metal son iguales en módulo, $v_p = 4$ km/s.

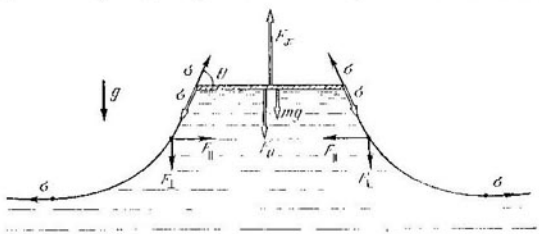
4.3.16*. $h = l\cos t\sqrt{g/l}$. $P = x\rho g/2$ en la parte vertical del tubo, $P = y\rho g/2$ en la parte horizontal del tubo (véase la figura)
4.3.17*. $a = g\,(s/S)^2$.
4.3.18. $E = PV$.
4.3.19*. $v = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{P}{\rho}\left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right)}$, donde ρ es la densidad del agua.
4.3.20. a) En caso de que la velocidad supere los 14 m/s. b*) Siendo la intensidad superior a 700 W/m².

§ 4.4. Flujo de un líquido (fluido) viscoso

4.4.1. $v = v_0 x/h$, $0 \leqslant x \leqslant h$, $F = \eta v_0/h$.
4.4.2. $v = \frac{\Delta P}{2\eta}\,x\,(h - x)$, $0 \leqslant x \leqslant h$; $Q = h^3\,\frac{\Delta P}{12\eta}$.
4.4.3*. $v = \Delta P\,(R^2 - r^2)/4\eta l$.
4.4.4. $Q = \frac{h^3\rho g \operatorname{sen}\alpha}{3\eta}$.
4.4.5. $F = P_2 S_2 - P_1 S_1 - \rho v_1^2\,S_1\,(1 - S_1/S_2)$

§ 4.5. Tensión superficial de un líquido

4.5.3. $r \approx 0{,}5$ cm.
4.5.4. $F = 2\,(\sigma_1 - \sigma_2)\,l$.
4.5.5. $\sigma = \frac{1}{2}\,ES\left(\frac{2\pi}{l} - \frac{1}{R}\right)$.
4.5.6. b) Cuando $\sigma_1 \leqslant \sigma_S - \sigma_{lS}$; c*) $\cos\theta = (\sigma_S - \sigma_{lS})/\sigma_l$
4.5.7. $a = 2{,}1$ mm.
4.5.8. $n = 5/4$.
4.5.9. $m = 0{,}546$ g/cm².
4.5.10. Menos que 0,2 cm/s².
4.5.11*. En la figura se muestran las fuerzas que actúan en un tramo de longitud unitaria (las fuerzas que actúan sobre la placa vienen denotadas por



Respuesta al problema 4.5.11*.

flechas dobles; las fuerzas que actúan sobre la superficie lateral vienen marcadas con flechas gruesas): F_x es la fuerza incógnita; mg es la fuerza de gravedad de la placa; $F_0 = \rho g x l$ y $F_{II} = {}^1/_2\,\rho g x^2$ son las fuerzas que se provocan por la presión

negativa del líquido; σ son las fuerzas de la tensión superficial. De la condición de equilibrio en la superficie lateral del líquido se desprende

$$F_0 = \rho g x^2/2 = \sigma - \sigma \cos \theta, \quad \cos \theta = 1 - \rho g x^2/2\sigma.$$

De la condición de equilibrio de la placa tenemos

$$F_x = F_0 + mg + 2\sigma \operatorname{sen} \theta = \rho g x l + mg + \\ + 2\sigma \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = mg + \rho g x \left(l + 2\sqrt{\sigma/\rho g - x^2/4}\right).$$

4.5.12. a) $x = \sqrt{2\sigma (1 - \operatorname{sen} \theta)/\rho g}$. b) $h = 4{,}0$ mm.

4.5.13. a) $x = 2 \operatorname{sen} (\theta/2) \sqrt{\sigma/\rho g}$. b) $\Delta = 5{,}4$ mm.

4.5.14*. a) $x = \sqrt{\dfrac{2(\sigma_1 + \sigma_{1ac} - \sigma_1)}{\rho_{ac} (\rho_1 - \rho_{ac}) g}}$, si $\sigma_1 \leqslant \sigma_{ac} + \sigma_{1ac}$; $x = 0$, si $\sigma_1 \geqslant \sigma_1 + \sigma_{1ac}$. b) Cerca de 2,5 km².

4.5.15. La componente vertical de la fuerza de la tensión superficial es igual al perímetro del palito multiplicado por $\sigma \cos \theta$. Por eso el volumen del líquido, que asciende debido a la tensión superficial, no depende de la forma de la sección del palito y sólo depende de su perímetro.

4.5.17. $P_{máx} = 2\sigma/R + \rho g (h + R)$, $P_{mín} = 2\sigma/R + \rho g (h - R)$.

4.5.18. $R = \sigma/\rho g$.

4.5.19. $P_1 = P + 2\sigma \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R - h}\right)$, $P_2 = P + \dfrac{2\sigma}{R}$.

4.5.20. Unos 3*l*

4.5.22*. $h = r \sqrt{\dfrac{\sigma + \sigma_1 + \sigma_2}{\sigma - \sigma_1 - \sigma_2} \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2}}$.

4.5.23. $R_p = rR/(R - r)$. $\alpha = 120°$.

4.5.24*. $m = \pi r^2 (\rho h + 2\sigma/Rg)$.

4.5.25*. a) $h = 0{,}14$ mm. b) $\nu = 50$ Hz.

4.5.26*. a) $A = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ J. b) $A = 0{,}01$ J.

§ 4.6. Fenómenos de capilaridad

4.6.1. b) Por dentro.

4.6.2. $h = 2\sigma/\rho g R$. $A = 4\pi\sigma^2/\rho g$, $U = 2\pi\sigma^2/\rho g$. Una parte de la energía se transforma en calor.

4.6.3. $\Delta = 0{,}4\%$

4.6.4. $r_1 = 1{,}50$ mm; $r_2 = 1{,}47$ mm; $r_3 = \infty$.

4.6.5. $\Delta x = \dfrac{2\sigma}{\rho g t}$, $0 < t < \dfrac{h}{v} - \dfrac{2\sigma}{\rho g v}$; $\Delta x = \dfrac{2\sigma}{\rho g r} - vt$, $t > \dfrac{h}{v} - \dfrac{2\sigma}{\rho g r v}$.

$\tau = \dfrac{2\sigma}{\rho g r v} + \dfrac{h}{v}$.

4.6.6. $R_x = R \dfrac{h}{l \cos \theta}$.

4.6.7*. $\omega = \dfrac{2}{l} \sqrt{\dfrac{\sigma}{2\rho}}$.

4.6.8. $x = 2h$, si $l > h$; $x = l + h$, si $l < h$.

4.6.9*. 17 °C $< t <$ 45 °C.

4.6.10. El líquido que moja se moverá hacia la parte estrecha del capilar y el líquido que no moja, hacia la parte ancha.

4.6.11. $x = \dfrac{1}{2} H \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{16\sigma}{\rho g \alpha H^2}}\right)$, $\alpha > 16\sigma/\rho g H^2$; $x = H$, $\alpha < 16\sigma/\rho g H^2$.

4.6.12. $\varkappa = \dfrac{\sigma}{\rho g \Delta}\,(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$.

4.6.13. $F = a\sigma\,(1 - \cos\theta)$.

4.6.14*. $F = 2a\sigma^2/\rho g \Delta^2$.

4.6.15*. $T = \dfrac{2\pi}{g}\sqrt{\dfrac{2\varkappa\rho}{r\rho}}$.

Capítulo 5.

FÍSICA MOLECULAR

§ 5.1. Movimiento térmico de las partículas

5.1.1. $m \gg 0{,}01$ mg.

5.1.2. $K \approx 5{,}8 \cdot 10^{-21}$ J, $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ m/s.

5.1.3. En 2 veces.

5.1.4. $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-8}$ m

5.1.5*. $d \approx 7$ cm. A $T = 100$ K, $d \approx 4$ cm.

5.1.6. Se nivela con mayor rapidez el número de partículas en la unidad de volumen de las moléculas más ligeras y móviles.

5.1.7. $P_{\text{hel}}/P_{\text{hidr}} = 1/\sqrt{2}$.

5.1.8*. $N_1/N_2 = (\mu_2/\mu_1)^{(m-1)/2}$.

5.1.9*. $\tau' = n\tau$.

5.1.10. En L^2/R^2 veces.

5.1.11*. $N_1 = N\sqrt{T_2}/(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})$, $N_2 = N\sqrt{T_1}/(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})$. $P_1 = N_1 k T_1/V$, $P_2 = N_2 k T_2/V$. Hacia el primer volumen

§ 5.2. Función de distribución

5.2.1. a) $N = 1{,}3 \cdot 10^{15}$ l^{-1}. b) $N_1 = 1{,}3 \cdot 10^{27}$ m^{-3}, $N_2 = 1{,}3 \cdot 10^{18}$ m^{-3}. c) $N_1 = 6{,}2 \cdot 10^{4}$ cm^{-3}; $N_2 = 1{,}2 \cdot 10^{6}$ cm^{-3}.

5.2.2. a) $N \approx 10^{16}$ cm^{-3}; b) $N \approx 2 \cdot 10^{22}$ m^{-3}.

5.2.3. $n = 0{,}13$.

5.2.4. $n = 6 \cdot 10^{-3}$.

5.2.5. a) $f' = \dfrac{1}{l} f\left(\dfrac{v}{l}\right)$. b) $f' = \dfrac{1}{l^2} f\left(\dfrac{v}{l^2}\right)$.

5.2.6. La temperatura se reducirá

5.2.7*. $L = l\dfrac{\tau}{t}\left(1 + \dfrac{2\tau_1}{t + 2\tau}\right)$.

5.2.8. $v = 300$ m/s.

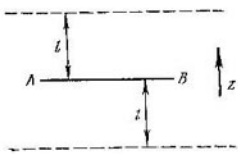
5.2.9. $v = h\omega/2\pi$.

5.2.10*. a) $v_{\min} = v + \dfrac{F\tau}{m}$, $v_{\max} = v + \dfrac{F\tau}{m} + \Delta v$, $n' = n$; b) $v_{\min} = v\sqrt{1 + 2Fl/mv^2}$, $v_{\max} = v\sqrt{1 + 2Fl/mv^2} + \Delta v\sqrt{1 + 2Fl/mv^2}$, $n' = n/\sqrt{1 + 2Fl/mv^2}$.

5.2.11*. No cambiará. Decrecerá en $\exp(2FL\alpha/m)$ veces.
5.2.12. $m = 10^{-24}$ kg, $r = 10^{-9}$ m.
5.2.13. $h_1 \approx 111$ km. $h_2 \approx 123$ km.
5.2.14*. a) $n = n_0 \exp(-q/kT)$, b) $n = 10^{15}$ cm^{-3}. $T = 660$ K.

§ 5.3. Colisión de las moléculas. Fenómenos de transferencia

5.3.1. $d \approx 0{,}3$ nm
5.3.2. $l \approx 60$ nm.
5.3.3. $\nu_1 \approx 6 \cdot 10^{28}$ s$^{-1}\cdot$cm^{-3}. $\nu_2 \approx 3 \cdot 10^{28}$ s$^{-1}\cdot$cm^{-3}.
5.3.4. a) $l \sim T$, $\nu \sim 1/\sqrt{T}$. b) $l \sim 1/P$, $\nu \sim P$.
c) $l \sim 1/P^{\gamma}$, $\nu \sim p^{(\gamma+1)/2\gamma}$.
5.3.5. $l_1 \approx \pi^{-1}[4R_1^2 n_1 + (R_1+R_2)^2 n_2]^{-1}$;
$l_2 \approx \pi^{-1}[4R_2^2 n_2 + (R_1+R_2)^2 n_1]^{-1}$.
5.3.6*. $t \approx 30$ ps.
5.3.7. a) A la altura h, a través de la plazoleta AB horizontal unitaria, de arriba incide un flujo de los átomos radiactivos, alejados de esta plazoleta a una



Respuesta al problema 5.3.7a.

distancia del orden l. La densidad de dicho flujo se estima por la fórmula $W_1 \approx \bar{v}_z n_{h+l}/2$, donde $\bar{v}_z$ es la velocidad próxima a $(\overline{v_z^2})^{1/2} = \sqrt{kT/m}$ y $n_{h+l} = \alpha(h+l)$, la cantidad de átomos en la unidad de volumen a la altura $(h+l)$. En tanto que la densidad del flujo de átomos que incide desde abajo es $W_2 \approx \bar{v}_z n_{h-l}/2 \approx \sqrt{kT/m}\,\alpha\,(h-l)/2$. La densidad resultante del flujo a la Tierra es $W = W_1 - W_2 \approx \alpha l \sqrt{kT/m}$.
b) $D \approx 12$ μ m/s.
5.3.8. $D = nD_1D_2/(n_1D_2 + n_2D_1)$.
5.3.9*. a) $t \approx L/D$. b) $m = DSp/L$.
5.3.10*. La solución de esta tarea es análoga a la 5.3.7 a: $W \approx n\alpha l k \times \sqrt{kT_0/m}$; no cambiará. b) En 6,2 veces.

5.3.11*. $$\varkappa = \frac{\varkappa_1}{1+\frac{1}{4\alpha}\left[1+\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right)^{1/2}\right]^2} + \frac{\varkappa_2}{1+\frac{\alpha}{4}\left[1+\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\right)^{1/2}\right]^2}.$$

5.3.12. $t' = nt$.

§ 5.4. Gases enrarecidos. Interacción de las moléculas con la superficie de un sólido

5.4.1. $\nu \approx 10^{24}\ s^{-1} \cdot cm^{-2}$. $\Delta p/\Delta t \approx 10$ N.
5.4.2. Se reducirá $1 - k/2$ veces.
5.4.3. $F \approx \pi R^2 nm\bar{v}^2$.
5.4.5. $F \approx 4\pi a^2 Pu \sqrt{\mu/3RT}$.
5.4.6. $F \approx P\sigma/2$.
5.4.7. $F \approx PSu \sqrt{\mu/3RT}$.
5.4.8. Mientras la longitud del recorrido libre de las moléculas del gas es mayor que la distancia entre los discos, el momento de la fuerza de viscosidad depende de la presión.
5.4.9. $\omega' = \omega/(r/R)^2$.
5.4.10. Al alumbrar las placas, la temperatura de la superficie ennegrecida supera la de la superficie brillante. Por eso, la presión sobre la primera superficie en el gas enrarecido es algo más alta.
5.4.11*. $F \approx 10^{-2}$ N.
5.4.12. $v \approx 1$ m/s.
5.4.13*. $P \approx F T_1/S\,(T_2 - T_1)$.
5.4.14*. $P_0 = P \sqrt{T_0/T}$.
5.4.15*. $P' = P\,(1 + \sqrt{2}) \cdot 2^{-5/4}$, $T' = T \sqrt{2}$.
5.4.16*. $Q \approx \dfrac{kn\Delta T}{\gamma - 1} \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$.
5.4.17. El valor de una división de la escala de temperaturas deberá disminuirse $\sqrt{14}$ veces.
5.4.18. $m \approx 0{,}1$ kg.
5.4.19. La termoconductividad se reducirá N veces.
5.4.20*. $r \approx (Q_1/Q_2\pi n\delta)^{1/2}$.

§ 5.5. Ecuación de estado del gas perfecto

5.5.1. En 3 veces.
5.5.2. $M = m\,(k - 1)\,n/(n - 1)$.
5.5.3. $V = 850$ l.
5.5.4. A diferencia del aire, el keroseno posee baja compresibilidad.
5.5.5. $P = 1{,}166$ MPa.
5.5.6. $\Delta t = 140$ °C.
5.5.7. En el régimen de funcionamiento, en que el gas en el globo de la bombilla se calienta, su presión no tiene que superar la atmosférica.
5.5.8*. $T = {}^9/_8\ T_0$.
5.5.9. $n = (P - P_0)\ V_0/P_0 V$.
5.5.10. $n = \dfrac{\ln (P_0/P)}{\ln (1 + V/V_0)}$.
5.5.11. Aumenta en un 8%.
5.5.12*. $\Delta P = 137$ Pa.
5.5.13. $T = T_0 \dfrac{2V_0 + S\,(l + 2x)}{2V_0 + S\,(l - 2x)}$.
5.5.14. $P = 1146$ hPa.
5.5.15. $V_2/V_1 \approx 1{,}9$.
5.5.16. $x = (H_0 - H)\left\{1 - \dfrac{\rho g h_0}{P_0 + \rho g H}\right\}$.
5.5.17. a) $H = \dfrac{h}{2}\left(1 + \dfrac{2\rho g h}{2P_0 + \rho g H}\right)$. b) $H = \dfrac{h}{2} + \dfrac{P_0}{\rho g}$.

5.5.18*. $P = P_0 + \rho g H$.
5.5.19*. $P_1 = 0{,}17$ MPa. $P_2 = 0{,}18$ MPa.
5.5.20. N_2O_3.
5.5.21. 28%.

5.5.22. $T = T_0 \dfrac{\mu (P_0 r + 4\sigma)}{\mu P_0 r - 3\delta \rho R T_0}$, donde R es la constante de los gases.

5.5.23. $\sigma = \dfrac{P}{4} \dfrac{r_1^3 + r_2^3 - r^3}{r^2 - r_1^2 - r_2^2}$.

5.5.24. $T = 2\pi \sqrt{mlf/2P_0S}$.

§ 5.6. Primer principio de la termodinámica. Capacidad calorífica

5.6.1. $\bar{\varepsilon}_{H_2} = \bar{\varepsilon}_{N_2} = \dfrac{5}{2} kT$, $\bar{\varepsilon}_{H_2O} = \bar{\varepsilon}_{CH_4} = 3\,kT$.

5.6.2. $U_1 = 0{,}25$ J, $U_2 = 0{,}2$ MJ.

5.6.4. $P = \dfrac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1 + V_2}$, $T = T_1T_2 \dfrac{P_1V_1 + P_2V_2}{P_1V_1T_2 + P_2V_2T_1}$.

5.6.5. En 2 veces.

5.6.6. $u_M \approx \sqrt{\dfrac{3P_0V_0m}{M(M+m)}}$, $u_m \approx \sqrt{\dfrac{3P_0V_0M}{m(M+m)}}$.

5.6.7. $T_{máx} = T_0 + 2mv^2/3R$, donde R es la constante de los gases.

5.6.8. $v \approx 10$ m/s.

5.6.9. En caso de expansión sin suministro de calor el gas realiza trabajo y se enfría.

5.6.10. En caso de expansión isobárica.

5.6.12. a) $A = PV$; b) $A = 3/2\,PV$.

5.6.13. $A = 460$ J.

5.6.14. $A = 2{,}6$ kJ.

5.6.15. $A = 240$ J.

5.6.16. $Q \approx 7{,}94$ kJ. $A \approx 2{,}27$ kJ

5.6.17. $A = R(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2$.

5.6.18. $T = T_0\left(1 + \dfrac{Mu^2}{3P_0V_0}\right)$, $V = V_0\left(\dfrac{3P_0V_0}{3P_0V_0 + Mu^2}\right)^{3/2}$.

5.6.19*. $u_{máx} = \sqrt[3]{2gH\left[1 - \dfrac{PS}{Mg} + \dfrac{PS}{Mg} \ln \dfrac{PS}{Mg}\right]}$;

$u_{máx} = \sqrt{2gH\left[1 - \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{PS}{Mg}\right)^{3/5} + \dfrac{3}{2}\dfrac{PS}{Mg}\right]}$.

5.6.20*. $V_1 = \sqrt[3]{V_0V_2}$, $A_{min} = 5P_0V_0[(V_0/V_2)^{1/3} - 1]$. Cada compresor realiza el trabajo $A_{min}/2$.

5.6.21. $Q = 0{,}37$ MJ. $\Delta U = 0{,}29$ MJ.

5.6.22. El oxígeno.

5.6.23*. $T = T_0 + Q/c$, cuando $Q \leqslant Q_1 = cT_0F/P_0S$; $T = \dfrac{Q + cT_0 + RT_0(1 + F/2P_0S)}{c(1 + F/P_0S) + R(1 + F/2P_0S)}(1 + F/P_0S)$, cuando $Q \geqslant Q_1$.

5.6.24. $Q = 10\,\rho g S h^2$.

5.6.25*. $PV^n = \text{const}$, donde $n = (c - c_P)/(c - c_V)$ es el índice de la curva politrópica. 1) $V = \text{const}$; 2) $P = \text{const}$; 3) $PV^\gamma = \text{const}$; 4) $PV = \text{const}$.

5.6.26. Se enfría; $c = c_V - R$.

5.6.27. $c = 2P_0V_0/T_0$.

5.6.28*. $c = \dfrac{4\pi r^3}{3T}\left(P_0' + \dfrac{4\sigma}{r}\right)\left(\dfrac{1}{\gamma - 1} + \dfrac{3P_0r + 12\sigma}{3P_0r + 8\sigma}\right)$.

5.6.29*. $x = \dfrac{3}{5}H\left(1 - \dfrac{PS}{Mg}\right)$.

§ 5.7. Salida del gas

5.7.1. $v = \sqrt{2\gamma RT/\mu(\gamma - 1)}$.

5.7.2*. $v = \sqrt{7(k+1)RT/(k\mu_1 + \mu_2)}$.

5.7.3*. a) $T \approx 3150$ K. b) $v \approx 3$ km/s.

5.7.4. a) $v \approx 5{,}2$ km/s; b) $v \approx 5{,}7$ km/s; c) $v \approx 7$ km/s.

5.7.5. $m_1 = Mg/\sqrt{2c_pT/\mu} = 3{,}8$ t/s.

5.7.6*. $v = \left\{\dfrac{2\gamma RT_1}{\mu(\gamma - 1)}\left[1 - \left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}$.

5.7.7*. $T \approx 120$ K. $v \approx 1370$ m/s.

5.7.8*. $T \approx 193$ K. $P \approx 0{,}33$ MPa.

5.7.9*. $v' = v\dfrac{1}{1-\gamma}\left[1 - \dfrac{P}{\rho v^2} + \sqrt{\left(\gamma + \dfrac{P}{\rho v^2}\right)^2 + \dfrac{2(\gamma^2 - 1)q}{\rho S v^3}}\right]$ donde $\rho = P\mu/RT$.

§ 5.8. Probabilidad del estado termodinámico

5.8.1. a) $t = \tau/4$. b) $t = \tau/8$. c) $t = \tau/2^N$.

5.8.2. a) $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/2$. b) $p = 1/2$. c) $p_3 = 3/8$, $p_0 = 1/8$.

5.8.3. a) $p = (1 - V_1/V)^N$. b) $V_1 = V(1 - 10^{-2/N})$.

5.8.4*. $p \sim 10^{-10^{15}}$; $V \sim 10^{-17}$ . . 10^{-18} cm^3.

5.8.5. $p = (V_1/V)^N$.

5.8.6. 200 kJ.

5.8.8*. $p'/p = (1 - V_1^2/V^2)^N$.

5.8.9*. En $10^{4,8 \cdot 10^{22}}$ veces.

5.8.10. No es real.

5.8.11. No es real. Es real.

§ 5.9. Segundo principio de la termodinámica

5.9.2. $\Delta S = 1{,}2$ kJ/K.

5.9.3. $\Delta S = 7$ kJ/K.

5.9.4. a), b) $\Delta S = \dfrac{m}{\mu} R \ln 2$.

5.9.5. a), b), c) $\Delta S = \dfrac{m}{\mu} R \ln\left\{\dfrac{V_2}{V_1}\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}\right\}$.

5.9.6*. $\Delta S \approx 20$ J/K.

5.9.7*. $\Delta S \approx 60$ J/K.

5.9.8. $\Delta S = \dfrac{pV}{T} \ln 2$.

5.9.9*. a) $\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = \frac{5}{2} R \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}$, donde Q_1 y Q_2 son las cantidades de calor transferidas al calentador y al refrigerador durante un ciclo.

b) $\Delta S = \frac{R}{2}\left[3\frac{P_2V_2}{P_1V_1} + 3\frac{P_1V_1}{P_2V_2} + 2\frac{V_2}{V_1} + 2\frac{V_1}{V_2} - 10\right]$.

5.9.10*. a) $\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}$; b) $\eta = \frac{2(T_2 - T_1)\ln(P_2/P_1)}{5(T_2 - T_1) + 2T_2\ln(P_2/P_1)}$.

5.9.11. No existe.

5.9.12. Es posible.

5.9.13. $\eta \approx 19{,}8\%$, $\eta_0 = 30\%$.

5.9.14. Para cualquier proceso térmico cíclico tenemos

$$\frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_r}{T_r} \geqslant 0, \quad Q_c - Q_r = A, \quad \eta = \frac{A}{Q_c},$$

donde T_c y T_r son las temperaturas del calentador y refrigerador, Q_c y Q_r, las cantidades del calor transmitidas al calentador y refrigerador durante un ciclo, A, el trabajo durante un ciclo. De las relaciones aducidas se desprende que el rendimiento $\eta \leqslant (T_c - T_r)/T_c$, con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar para el caso $Q_c/T_c = Q_r/T_r = 0$, es decir, cuando la entropía no cambia.

5.9.15. Durante la detonación, la entropía del sistema crece.

5.9.16. $A \approx 33$ kJ.

5.9.17. $A \approx 3 \cdot 10^{18}$ J, $t \approx 60$ días.

5.9.18*. $A = C[T_1 - T_0 - T_0 \ln(T_1/T_0)] \approx 62$ kJ.

5.9.19*. $A = C_1T_1 + C_2T_2 - (C_1 + C_2)T_1^{C_1/(C_1+C_2)}T_2^{C_2/(C_1+C_2)} \approx 32$ kJ.

5.9.20. Aumentará.

5.9.21. $Q = A(1 - \eta)/\eta$.

5.9.22. $m = 5$ kg.

5.9.23. $N = 138$ W.

5.9.24*. $A = 46$ kJ.

5.9.25. No. El proceso durará hasta que el medio ambiente se sature de vapor de agua.

§ 5.10. Transiciones de fase

5.10.1. $t = 1$ h.

5.10.2. 13% del agua.

5.10.3. La mezcla de 109,5 g de agua y 30,5 g de hielo a 0 °C.

5.10.4. $m = 93$ g/s.

5.10.5*. $x \approx 0{,}11$ mm.

5.10.6. Mientras la cazuela contenga agua, la temperatura del fondo de la misma será del orden de 100 °C.

5.10.7. Sí, se puede.

5.10.8. Entre la superficie del hornillo incandescente y la gota se forma una capa de vapor que dificulta el suministro de calor.

5.10.9. En las inmediaciones del fondo caliente de la tetera se forma y se desprende gran cantidad de menudas burbujas de vapor.

5.10.10. Sin la tapa el agua de la superficie se evapora, para lo cual se requiere una cantidad complementaria de calor.

5.10.11. $v \approx 8$ m/s.

5.10.12*. El tetracloruro de carbono se evaporará 25 veces más rápido.

5.10.13. Para prevenir la condensación del vapor.

5.10.14. No se puede.

5.10.15. A la temperatura crítica, el líquido y el vapor son indistinguibles.

5.10.16. La presión del vapor saturado sobre la superficie del hielo difiere de cero.

5.10.18. Sí, antes.
5.10.19. $m = 11{,}7$ g.
5.10.20. $P = 0{,}2$ MPa. $A = 35$ kJ.
5.10.21. $P = 0{,}37\ P_0$.
5.10.22. $\Delta V = m\lambda RT/P_0\,(\mu q + RT)$, $A = m\lambda RT\mu q/(\mu q + RT)$, donde μ es la masa molecular del agua.
5.10.23*. $h \approx 580$ m.
5.10.24. 5% de agua.
5.10.25. 6% de hielo.

§ 5.11. Radiación térmica

5.11.1. a) $\Phi = 0{,}2$ kW. b) $\varphi = 80$ MW/m^2.
5.11.2. $T_1 \approx 600$ °C. $T_2 \approx 2000$ °C.
5.11.3*. $w = 7{,}66 \cdot 10^{-16}\ T^4$ J/m^3.
5.11.5. a) A diferencia del acero, el cuarzo casi no absorbe la luz visible. Por eso al calentar, en la zona visible el cuarzo radia con menos intensidad.
b) A diferencia del carbón negro, que absorbe casi totalmente la luz visible, la tiza blanca refleja esta luz. Por eso al calentarla, la tiza, emite mucha menos luz y en el fondo del carbón, que radia intensamente, parece oscura.
5.11.6*. a) $T_x = T/\sqrt[4]{2}$. b) $T_x = \sqrt[4]{(T_1^4 + T_2^4)/2}$.
5.11.7. $T_x = T\sqrt{\varepsilon}\,(R/2L)^2$.
5.11.8. a) $T = 200$, 70, -35 °C. b) $\Phi \approx 4 \cdot 10^{26}$ W. c) $T = 140$ °C.
5.11.9. $T = 2{,}4$ K.
5.11.10. $T = 20$ °C.
5.11.11*. $\Phi = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}\,\sigma S\,(T_1^4 - T_2^4)$.
5.11.12. a) $T_x = T/\sqrt[4]{2}$. b) $n = 32$. c) $T = T_0\sqrt[4]{16{,}5}$.
5.11.13*. $T_x = T/\sqrt[4]{6{,}5 + 4R/r}$.
5.11.14*. $T = \sqrt[4]{T_1^4 - T_2^4 + \left[T_1 + \dfrac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\,(T_1^4 - T_2^4)\,\dfrac{h}{\varkappa}\right]^4}$.
5.11.16. a) $a = \dfrac{S\Phi}{2\pi R^2 Mc}$. b*) $v = \left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)\sqrt{\dfrac{S\Phi}{\pi Mc}}$.
5.11.17. a) Sobre la cola del cometa actúa la presión de los rayos solares. b) $r \approx 1$ μm.

Capítulo 6

ELECTROSTÁTICA

§ 6.1. Ley de Coulomb

6.1.1. a) $F = 1{,}8 \cdot 10^4$ N. b) $F = 2{,}3 \cdot 10^{-8}$ N.
6.1.2. $F = 2{,}57 \cdot 10^{15}$ N.
6.1.3. $Q = 1{,}06 \cdot 10^{-5}$ C $= 3{,}17 \cdot 10^4$ CGS.
6.1.4. $T = mg + \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} - \dfrac{4}{3}\,\pi r^3 \rho g$.

6.1.5. $T_{12}=\frac{q_1(4q_2+q_1)}{16\pi\varepsilon_0 l^2}$, $T_{23}=\frac{q_2(4q_2+q_1)}{16\pi\varepsilon_0 l^2}$.

6.1.6. a) A la distancia $x=\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}l$ de la carga q_1. Sí. No. No.

b) $x=\frac{Q}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg}}$, $x=-\frac{Q}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg}}$.

6.1.7. $T=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left(Q^2-\frac{q^2}{3\sqrt{3}}\right)$.

6.1.8. $\beta=2\operatorname{arctg}(q/Q)^{2/3}$.

6.1.9. $q=8\,mgR^2/Q$.

6.1.10. a) $r=1{,}4\cdot10^{-8}$ cm.

b) $\omega=\frac{e}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi am\varepsilon_0}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)}$.

6.1.11. $x=\sqrt[5]{2q^2l^2/k\pi\varepsilon_0}$.

6.1.12*. $T=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 l^2}\left(\frac{9}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

6.1.13. $q=l\sqrt{8Mg\pi\varepsilon_0}$.

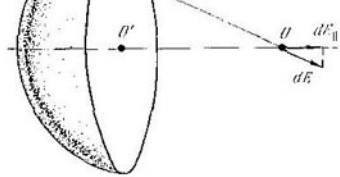
§ 6.2. Intensidad del campo eléctrico

6.2.1. A la distancia de 1 m $E_1=9\cdot10^{10}$ V/m $=3\cdot10^8$ CGS; a la distancia de 20 m $E_2=2{,}25\cdot10^8$ V/m $=7{,}5\cdot10^5$ CGS. Sobre la carga de 0,001 C actúa la fuerza $F_1=9\cdot10^7$ N, $F_2=2{,}25\cdot10^6$ N. Sobre la carga de 1000 CGS, $F_1=3\cdot10^9$ dyn, $F_2=7{,}5\cdot10^6$ dyn.

6.2.2. a) $E=1$ V/m $=3{,}3\cdot10^{-8}$ CGS. b) $E=3\cdot10^6$ V/m $=10$ CGS.

6.2.3. $E_1=0$. $E_2=\frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0(R^2+h^2)^{3/2}}$.

6.2.4*. a) En el punto O la intensidad del campo eléctrico de la carga de la pequeña área dS es igual a $\sigma dS/4\pi\varepsilon_0 R^2$, en tanto que la proyección de dicha



Respuesta al problema 6.2.4*a.

intensidad sobre el eje OO' es igual a $\sigma dS'/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Por lo tanto, la intensidad total del campo eléctrico en el punto O es $\sigma\pi r^2/4\pi\varepsilon_0 R^2$.

b) $E = \sigma/4\varepsilon_0$.

c) $E = \sqrt{3}\,\sigma/16\,\varepsilon_0$.

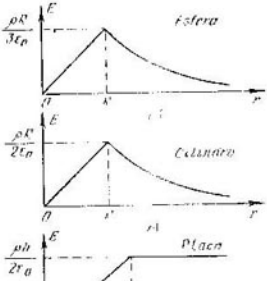
6.2.5. a) $E = \sigma/6\varepsilon_0$. b) $E = (\sigma_1 - \sigma_2)/4\varepsilon_0$. c) $E = \sigma_1/2\varepsilon_0$. d) $E = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}/3\varepsilon_0$

6.2.6. a) $q = \sqrt{10}\,Q$. b) $q = 9Q$.

6.2.7*. $A_y = 6\ A$.

6.2.8. a) $\Phi = En^2/2$. b) $\Phi = Eh^2$, $\Phi = -Eh^2$.

6.2.10. a) $E_{in} = 0$, $E_{ex} = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. b) $E = \rho/2\pi\varepsilon_0 r$. c) $E = \sigma/2\varepsilon_0$. d) Véase la figura. $E_{in} = \rho r/3\varepsilon_0$, $r < R$, $E_{ex} = \rho R^3/3\varepsilon_0 r^2$, $r > R$. e) $E_{in} = \rho r/2\varepsilon_0$, $r < R$; $E_{ex} = \rho R^2/2\varepsilon_0 r$, $r > R$.



Respuesta al problema 6.2.10.

f) $E_{in} = \rho x/\varepsilon_0$, $x < h/2$ (x es la distancia hasta el plano central de la placa); $E_{ex} = \rho h/2\varepsilon_0$, $x > h/2$.

6.2.11. a) $E = \rho_0 r_0^2/\varepsilon_0 r$. b) $E = \rho_0 r_0/\varepsilon_0$.

6.2.12. a) $\rho = 2E_0\varepsilon_0/r$. b) $\rho = E_0\varepsilon_0/r$.

6.2.13*. a) La fuerza que actúa sobre la cara es igual al producto del flujo de la intensidad del campo eléctrico a través de esta cara por σ. Pero dicho flujo a su vez es igual a $q/4\varepsilon_0$. Por lo tanto, $F = \sigma q/4\varepsilon_0$.

b) La fuerza que actúa sobre la cara destacada del cubo $F = \sigma \int_{(S)} E_n\, dS$, donde $\int_{(S)} E_n\, dS$ es el flujo de la intensidad del campo eléctrico, creado por las cinco caras restantes, a través de la cara destacada. En calidad de superficie cerrada construyamos un cubo un poco mayor que el dado. Entonces las seis caras cargadas dan un flujo de la intensidad del campo electroco a través de todos los seis lados del cubo construido $N = q/\varepsilon_0 = 6\sigma l^2/\varepsilon_0$, en tanto que a través de una cara $N' = \sigma l^2/\varepsilon_0$. Pero

$$N' = \underbrace{\int_{\text{de cinco caras}} E_n\, dS}_{\text{de cinco caras}} + \underbrace{\frac{\sigma l^2}{2\varepsilon_0}}_{\text{de la cara destacada}}.$$

Por consiguiente, $\int_{(S)} E_n\, dS = \dfrac{\sigma l^2}{\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma l^2}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma l^2}{2\varepsilon_0}$. Eso significa que la fuerza $F = \sigma^2 l^2/2\varepsilon_0$. Razonando de la misma manera, obtendremos para el tetraedro $F = \sqrt{3}\,\sigma^2 l^2/8\varepsilon_0$.

6.2.14. a) $E_{in} = \sigma/\varepsilon_0$, 0, $3\sigma/2\varepsilon_0$; $E_{ex} = 0$, σ/ε_0, $\sigma/2\varepsilon_0$.

b) $E_{in\,1} = \sigma/2\varepsilon_0$, $\sigma/2\varepsilon_0$, σ/ε_0, σ/ε_0; $E_{in\,2} = \sigma/2\varepsilon_0$, $\sigma/2\varepsilon_0$, σ/ε_0, $3\sigma/\varepsilon_0$; $E_{ex} = 3\sigma/2\varepsilon_0$, $\sigma/2\varepsilon_0$, 0, 0.

6.2.15. a) $E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\operatorname{sen}(\alpha/2)$, $E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\cos(\alpha/2)$; $E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\cos(\alpha/2)$, $E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\operatorname{sen}(\alpha/2)$. b) $E_{in} = 0$, $E_{ex} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

6.2.16. $E_{máx} = \rho h/\varepsilon_0$, $E_{máx} = \rho h/\varepsilon_0$, $E_{máx} = 3\rho h/2\varepsilon_0$.

6.2.17. $E_A = \rho h/6\varepsilon_0$, $E_B = \rho h/3\varepsilon_0$, $E = \rho r/3\varepsilon_0$.

6.2.18. $E=\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$ para $a-r<x<a$; $E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[x+\frac{r^3}{(a-x)^2}\right]$ para $0<x<a-r$, donde x se calcula desde el centro de la esfera.

6.2.19*. a) $E=\rho a/3\varepsilon_0$. b) $\sigma=3\varepsilon_0 E\cos\alpha$; $\sigma_{máx}=3\varepsilon_0 E$.

6.2.20*. $\sigma=2E\varepsilon_0\cos\alpha$.

6.2.21*. $E=\rho l/4\pi\varepsilon_0 x\,(l+x)$.

6.2.23. $T=\sqrt{M^2g^2+\sigma^2Q^2/4\varepsilon_0^2}$, $\alpha=\operatorname{arctg}(\sigma Q/2\varepsilon_0 Mg)$.

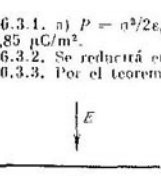
6.2.24. $\sigma=\sqrt{\rho g\alpha\varepsilon_0}$

§ 6.3. Presión eléctrica. Energía del campo eléctrico

6.3.1. a) $P=\sigma^2/2\varepsilon_0$ b) $\sigma=\varepsilon_0 E$, $P=\varepsilon_0 E^2/2$. c) $P=4{,}425$ Pa, $\sigma=8{,}85$ μC/m².

6.3.2. Se reducirá en $(1+Q^2/2P_0\varepsilon_0 S^2)$ veces.

6.3.3. Por el teorema de Gauss determinemos la densidad superficial de la carga en la superficie de separación de los campos: $\sigma=\varepsilon_0 E$. Utilizando el principio de superposición:



Respuesta al problema 6.3.3.

$$E_{ex}-\sigma/2\varepsilon_0=E,\qquad E_{ex}+\sigma/2\varepsilon_0=2E,$$

hallamos la intensidad del campo exterior $E_{ex}=3/2\,E$. La fuerza que actúa sobre la carga, perteneciente a la unidad de área de la superficie de separación de los campos, (la presión) por parte del campo exterior $P=E_{ex}\sigma=3/2\,\varepsilon_0 E^2$. Para los campos E y $-2E$, razonando de la misma manera, obtenemos $\sigma=-3\varepsilon_0 E$ y $E_{ex}=-3/2\,E$. Así, pues, en el segundo caso la densidad superficial de la carga es 3 veces mayor, pero la intensidad del campo exterior es 3 veces menor. Por eso la presión eléctrica será la misma: $P=E_{ex}\sigma=3/2\,\varepsilon_0 E^2$.

6.3.4. a) $P=\rho^2h^2/2\varepsilon_0$. b) La fuerza eléctrica que actúa sobre la parte destacada de la lámina es igual al producto de la carga de esta parte $q=S\varepsilon_0(E_1-E_2)$ por la intensidad del campo exterior $E_{ex}=1/2\,(E_1+E_2)$: $F=qE_{ex}=1/2\,S\varepsilon_0(E_1^2-E_2^2)$

6.3.5. $P=Q^2/32\pi^2\varepsilon_0 R^4$ (véase la solución del problema 6.3.3).

6.3.6*. a) $q=Q/2$. b) $F=Q^2(R^2-h^2)/32\pi\varepsilon_0 R^4$.

6.3.8. $A=2E_0\rho hS$.

6.3.9. $A=\sigma^2Sh/2\varepsilon_0$.

6.3.10. $A=\varepsilon_0 hS\,(E^2-E_1E)$.

6.3.11. $W=Q^2/8\pi\varepsilon_0 R$.

6.3.12. $r=1{,}4\cdot10^{-15}$ m.

6.3.13. En 1400 veces.

6.3.14*. $W=3Q^2/20\pi\varepsilon_0 R$.

6.3.15. $A=Q^2/8\pi\varepsilon_0 R$.

6.3.16. $A=\frac{\sigma^2R^2\pi}{\varepsilon_0}\ln 3$.

6.3.17. En n veces.

6.3.18. $A_x=\sqrt{2}\,A$.

6.3.19. $\Delta W=Q^2/4\pi\varepsilon_0 a$.

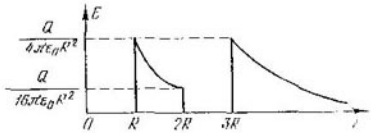
6.3.20. $\rho=2\varepsilon_0 E/r$. $W=2/3\pi\varepsilon_0 E^2(R_2^3-R_1^3)$.

§ 6.4. Conductores en un campo eléctrico

6.4.1. b) El largo. c) Sí, puede. d) Es posible.

6.4.3. a) $-Q$. b) $\sigma = Q/4\pi R^2$; $E = Q/2\pi\varepsilon_0 L^2$. no, no

6.4.4. Véase la figura. $E = 0$, cuando $0 < r < R$; $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, cuando $R < r < 2R$; $E = 0$, si $2R < r < 3R$; $E = 9Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, si $3R < r < \infty$.



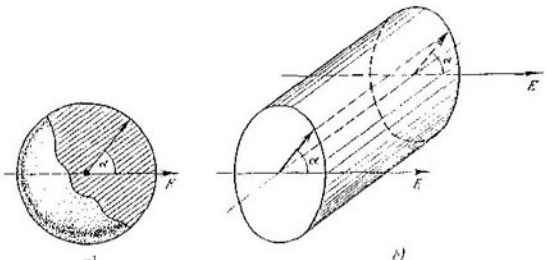
Respuesta al problema 6.4.4.

6.4.5*. La superficie de la cavidad tendrá la carga $-q$, y la carga de la superficie del conductor, $+q$. Dicha carga (a excepción de la zona en la proximidad de los extremos del conductor) se distribuye uniformemente por la superficie del conductor. Por eso $E = 0$, cuando $0 < x < r$; $E \approx q/2\pi\varepsilon_0 xL$, cuando $r < x < R$; $E \approx 0$, cuando $x > R$, donde x es la distancia hasta el eje.

6.4.6. a) $\sigma = \varepsilon_0 E$, $P = \varepsilon_0 E^2/2$ b) $A = \varepsilon_0 E^2 hS/2$.

6.4.7. $A = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\,(1 - N^{-2/3})$.

6.4.8. a) Véase la figura. $\sigma = 3\varepsilon_0 E\cos\alpha$; $P_{máx} = 9\varepsilon_0 E^2/2$ b) $\sigma = 2\varepsilon_0 E\cos\alpha$; $P_{máx} = 2\varepsilon_0 E^2$.



Respuesta al problema 6.4.8.

6.4.9*. La densidad superficial de la carga en las secciones correspondientes de la superficie permanece siendo la misma.

6.4.10*. a) $p = 4\pi\varepsilon_0 ER^3$, $\alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3$; $\alpha = \varepsilon_0 hS$ b) Se reducirá en n^3 veces.

6.4.11. $F = Q^2/16\pi\varepsilon_0 h^2$. $P = Q^2/8\pi^2\varepsilon_0 h^4$.

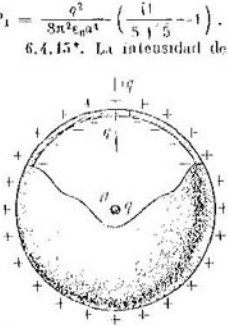
6.4.12. $F = 3Q^2/32\pi\varepsilon_0 h^2$.

6.4.13. $q = \sigma S$, $W = \sigma^2 hS/2\varepsilon_0$.

6.4.14. [a] No b) $P = \dfrac{q^2(2\sqrt{2}-1)}{32\pi\varepsilon_0 a^2}$. c) $P = \dfrac{q^2(1-5\sqrt{5})^2}{1000\pi^2\varepsilon_0 a^4}$;
$P_1 = \dfrac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 a^4}\left(\dfrac{11}{5\sqrt{5}}-1\right)$.

6.4.15*. La intensidad del campo debida a las cargas, distribuidas por una envoltura esférica, en el centro de la esfera es nula y puede representarse como

$$E_{\text{tapón}}(0) + E_{\text{esfera sin tapón}} = 0.$$



Respuesta al problema 6.4.15*.

Cuando $\Delta \ll r \ll R$ el campo del tapón es el campo de un dipolo, cuya intensidad en el punto O es igual a $E_{\text{tapón}}(0) = q'\Delta/2\pi\varepsilon_0 R^3$. Después de sacar el tapón la redistribución de las cargas en la parte restante de la envoltura esférica, siendo $\Delta \ll r$, será insignificante y para la estimación puede consultarse que

$$E(0) = E_{\text{esfera sin tapón}} \approx$$
$$\approx -E_{\text{tapón}} = -q'\Delta/2\pi\varepsilon_0 R^3.$$

Según el teorema de Gauss $q' = -qr^2/4R^2$. Teniendo eso en cuenta, tenemos $F = q^2 r^2 \Delta/8\pi\varepsilon_0 R^5$.

6.4.16*. El campo fuera de la esfera debe ser normal a su superficie y el flujo de la intensidad del campo eléctrico a través de la superficie cerrada debe ser nulo, si dentro de ésta no se encuentra la carga q. El campo de las cargas q y $\pm Rq/L$ satisface estas condiciones.

6.4.17. Aumentará en $F = Qq/4\pi\varepsilon_0 L^2$

6.4.18. $\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$, $\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$, $-\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$, $\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$.

§ 6.5. Potencial del campo eléctrico

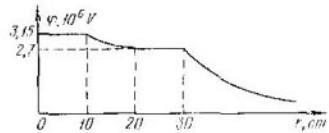
6.5.1. a) $v = 10^7$ m/s; b) $v = 1{,}25 \cdot 10^6$ m/s.

6.5.2. $v_H = 8{,}4 \cdot 10^6$ m/s; $v_C = 6{,}46 \cdot 10^6$ m/s.

6.5.3. a) $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 r$. b) $\varphi = 1/2\pi\varepsilon_0 a$. c) $\varphi = 2{,}7 \cdot 10^8$ V. d) $\varphi = 1{,}35 \cdot 10^4$ V $= 45$ CGS

6.5.4. $\varphi = Q/4\pi\varepsilon_0 R$; no; sí.

6.5.5. Véase la figura.



Respuesta al problema 6.5.5.

6.5.6. $q_r = -8\pi\varepsilon_0 r\varphi$, $q_{2r} = 16\pi\varepsilon_0 r\varphi$

6.5.7. $\varphi_1 = q/4\pi\varepsilon_0 r$, $\varphi_2 = q/8\pi\varepsilon_0 r$, $\varphi_3 = 0$.

6.5.8. a) $\varphi_1 = \dfrac{R_2 - R_1}{R_2}\varphi$; $\varphi_2 = \dfrac{R_1}{R_2}\varphi$. b) Decrecerá en $\dfrac{R_1(R_2-R_3)}{R_2 R_3}\varphi$.

6.5.9. $Q = 4\pi\varepsilon_0 RK/e$.

6.5.10*. a) $Q = -\dfrac{Rq}{L}$. b) $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_1}{L} + \dfrac{Q_2}{R}\right)$. c) $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times$

$\times\left[\dfrac{Q}{R} + \dfrac{(q-Q)}{2L}\right]$.

6.5.11* $\varphi = \dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0}\ln 2$.

6.5.12. $\varphi = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right)$, si $0 \leqslant r \leqslant R$; $\varphi = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$, si $r > R$.

6.5.13*. $\varphi = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r^2 \ln\dfrac{R}{r} + \dfrac{r^2}{2} - \dfrac{r^2}{2}\right)$, siendo $0 < x < r$;

$\varphi = \dfrac{\rho r^2}{2\varepsilon_0}\ln\dfrac{R}{r}$, siendo $r \leqslant x \leqslant R$

6.5.14. $Q = \dfrac{2\pi\rho r}{3}(3R^2 - r^2)$. $\varphi = \dfrac{\rho(r^2 - x^2)}{6\varepsilon_0}$, en caso de $0 \leqslant x \leqslant r$; $\varphi =$

$= \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - x^2 - \dfrac{3R^2 r}{x} + \dfrac{r^3}{x}\right)$, en caso de $r \leqslant x \leqslant R$

6.5.15. a) $\varphi = 850$ V; $v = \sqrt{3}\cdot 10^7$ m/s. b) $v = 0{,}88\ 10^7$ m/s; $\varphi = 3\cdot 10^4$ V.

6.5.16. a) 37,7 CGS = 11,3 kV. b) 19 CGS = 5,7 kV c) $\dfrac{\sigma(h_1 - h_2)}{2\varepsilon_0}$;

$\dfrac{\sigma(h_2 - h_1)}{2\varepsilon_0}$, $\dfrac{\sigma(h_2 - h_1)}{\varepsilon_0}$; $\dfrac{\sigma(3h_2 - h_1)}{\varepsilon_0}$.

6.5.17. $\varphi = 14{,}4$ V.

6.5.18. a) $\varphi_1 = \rho R^2/6\varepsilon_0$; $\varphi_2 = \rho R^2/4\varepsilon_0$; $\varphi_3 = \rho R^2/8\varepsilon_0$

b*) $\varphi = \rho(2r^3 - a^3 - 3r^2 a)/6\varepsilon_0 a$.

6.5.19. a) La intensidad del campo cerca de la lámina superior es $\sigma b/\varepsilon_0(a + b)$ y cerca de la inferior, $\sigma a/\varepsilon_0(a + b)$; las densidades superficiales, respectivamente, son $-\sigma b/(a + b)$ y $-\sigma a/(a + b)$.

b*) $q_a = -qb/(a + b)$; $q_b = -qa/(a + b)$.

c) $E_1 = \varphi/a$; $E_2 = \varphi/b$.

6.5.20. $k = 3q^2 R^2/16\pi^2\varepsilon_0 \rho r^6$.

6.5.22. $A_3 = 3A$. $A_n = \dfrac{n(n-1)}{2}A$.

6.5.23. $A = Q^2 ab/2S\varepsilon_0(a + b)$.

6.5.24. $Q_x = qQ/(Q - q)$.

6.5.25. $\Delta\varphi = A/Q$.

6.5.26. Aumentará 3 veces.

6.5.27. $C = 4\pi\varepsilon_0 R$.

§ 6.6. Condensadores

6.6.1. b) Aumentará 4 veces. c) Se reducirá a la mitad; se reducirá n veces. d) $C = \varepsilon_0 S/d$. e) $C = 5{,}3$ cm $= 5{,}9$ pF

6.6.2. a) Aumentará 1,5 veces. b) Aumentará $(1 + S'/2S)$ veces. c) No cambiará.

6.6.3. a) Aumentará 1,5 veces. b) Aumentará al doble.

6.6.4. a) $C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$. b) $\alpha = 4\pi\varepsilon_0\left[\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} - \dfrac{d}{R_0(R_0 - d)}\right]^{-1}$.

6.6.5*. $C = 2\pi\varepsilon_0 l/\ln(R_2/R_1)$.

6.6.6. a) $C_r = 2\pi\varepsilon_0 lR/\Delta R$, $C_{esf} = 4\pi\varepsilon_0 R^2/\Delta R$, donde l es longitud del condensador cilíndrico. b) $C = \varepsilon_0 la/d$

6.6.7. $q = \pm\varepsilon_0 SE$.

6.6.8. a) $^1/_2\,C$, $2C$. b) $^1/_2\,C$, C. c) $^2/_3\,C$, $^1/_3\,C$. d) $^1/_2\,(\sqrt{5}-1)\,C$. e) $^2/_3\,C$.

6.6.9. $\Delta q = C_1C_2Qx/(C_1+C_2)\,\varepsilon_0 S$.

6.6.10. a) $W = 4A$ mJ. b) $W_{esf} = 2\pi\varepsilon_0 r_1 r_2 V^2/(r_2 - r_1)$. c) $W_c = \pi\varepsilon_0 lV^2/\ln(r_2/r_1)$.

6.6.11. Aumentará k veces. Aumentara n^2 veces.

6.6.12. a) $A = Q^2d/2\varepsilon_0 S$. b) $A = Q^2\,dx/2\varepsilon_0 a^2\,(a-x)$. c) $A_a = Q^2d/4\varepsilon_0 S$, $A_b = Q^2dx/2a^2\varepsilon_0$.

6.6.13. $F = 4{,}4\cdot10^{-2}$ N No.

6.6.14. a) $F = 2Q^2\varepsilon\varepsilon_0(d-c)/\varepsilon_0 a^2\,(2d-c)^2$. b) $k = \varepsilon_0 acV/2d\,(d-c)$.

6.6.15*. $\sigma = \sqrt{8\varepsilon_0 Mg\,l\,(a-b)}$.

6.6.16. $P = \varepsilon_0 R^2V^2/2r^2\,(R-r)^2$.

§ 6.7. Campo eléctrico en presencia del dieléctrico

6.7.2*. a) $p = 4\pi r^3\varepsilon_0 E$. b) $\varepsilon = 1 + 4\pi r^3 n$.
c) $p = 7\cdot10^{-17}$ C·m. d) $r = 1{,}4\cdot10^{-8}$ m.

6.7.3. a) Siendo $np_0 < \dfrac{Q}{S}$ $E = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q}{S} - np_0\right)$, $V = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q}{S} - np_0\right)h$; siendo $np_0 \geqslant \dfrac{Q}{S}$ $E = 0$, $V = 0$. b) cuando $np_0 < \dfrac{\varepsilon_0 V}{h}$ $P = np_0$, $E = V/h$, $Q = np_0 S$; cuando $np_0 \geqslant \dfrac{\varepsilon_0 V}{h}$ $P = \varepsilon_0 V/h$, $E = V/h$, $Q = \dfrac{\varepsilon_0 VS}{h}$.

6.7.4. a) Los momentos dipolares en el dieléctrico con cierto retardo se orientan por medio del campo eléctrico. b) $\varepsilon = 2$.

6.7.5. $V = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,V_0$.

6.7.6. a) Aumentará ε veces. b) Se reducirá ε veces.

6.7.7. $q = (\varepsilon - 1)\,VC$.

6.7.8. a) $\Delta V = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\,V$; $\Delta V = \dfrac{\varepsilon - 1}{n\varepsilon - \varepsilon + 1}\,V$. b) $\Delta V = \dfrac{h\,(\varepsilon - 1)}{n}\,V$.

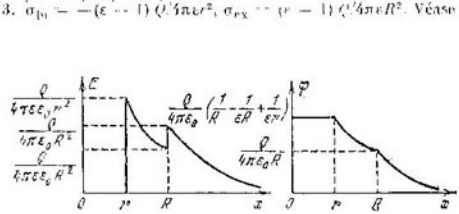
6.7.9. a) $C = \dfrac{\varepsilon_0\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,S}{2h}$. b) $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{h_1\varepsilon_2 + h_2\varepsilon_1}$.

6.7.10. $C = \dfrac{\varepsilon_0 h_2\,(\varepsilon_1 - 1)\,(S_2 - S_1) + \varepsilon_0\varepsilon h_1 S_1}{h_1\,(h_1 - h_2)\,\varepsilon + h_2 h_1}$.

6.7.11. $E_{in} = E\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \dfrac{\cos^2\alpha}{\varepsilon^2}}$.

6.7.12. $\rho = -qd^2\varepsilon_1 S\,(d + x)^2$.

6.7.13. $\sigma_{in} = -(\varepsilon - 1)\,Q/4\pi\varepsilon r^2$, $\sigma_{ex} = (\varepsilon - 1)\,Q/4\pi\varepsilon R^2$. Véase la figura.



Respuesta al problema 6.7.13.

6.7.15. $F = (\varepsilon^2 - 1)\,Q^2/2\varepsilon_0\varepsilon^2 S$, $P = (\varepsilon^2 - 1)\,Q^2/2\varepsilon_0\varepsilon^2 S^2$.

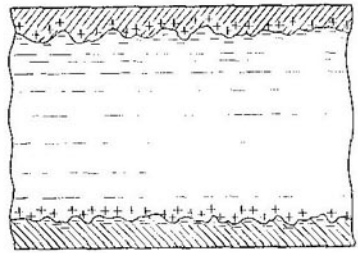
6.7.16. $F = 2hQ^2\,(\varepsilon - 1)/\varepsilon_0 ba^2\,(\varepsilon + 1)^2$.

6.7.17. $F = \varepsilon_0 E^2 \cos^2\alpha\ (\varepsilon^2 + 1)/2\varepsilon^2$; $A = (\varepsilon - 1)\, Sh E^2 \operatorname{sen}^2\alpha/2\varepsilon$.

6.7.18*. a) Hacia el hilo. b) $F = \dfrac{\varepsilon_\perp (\varepsilon - 1)}{\varepsilon\,(\varepsilon_\perp - 1)} F_\perp$. c) $F \sim V^2$; $F \sim 1/r^3$. d) En $(R/r)^3$ veces.

6.7.19*. a) $F = (\varepsilon - 1)\, S\delta Q^2/8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^5$. b) No.

6.7.20*. A causa de las microasperezas, las cargas superficiales en la placa no se mezclan con las cargas superficiales inducidas en el líquido. Por eso la fuerza media que actúa sobre las cargas inducidas por parte de la placa próxima, es nula. Sobre las cargas inducidas influye solamente el campo eléctrico de las cargas, yacentes en la proximidad de la placa alejada. La intensidad del



Respuesta al problema 6.7.20*.

campo eléctrico de estas cargas es $E/2$. Por eso la fuerza que estira el líquido es $F = ES\sigma_1'/2$ (S es el área de la placa, σ_1', la carga inducida en unidad de área de la placa), en tanto que la presión negativa en el líquido $P = E\sigma_1'/2 = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\, E^2/2$.

6.7.21. $x = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)/2h^2\rho g$.

6.7.22*. $P = \varepsilon_0 (\varepsilon^2 - 1)\, R^2 V^2/2r^2\, (R - r)^2$.

Capítulo 7

MOVIMIENTO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

§ 7.1. Movimiento en un campo eléctrico constante

7.1.1. En caso de que la velocidad inicial de la partícula esté orientada a lo largo de la línea de fuerza rectilínea.

7.1.2. $t = 0{,}56$ μs; $x = 2{,}8$ m.

7.1.3*. $x \approx 10{,}3$ m.

7.1.4. $u = v \sqrt{1 + \dfrac{2qEd}{mv^2}}\ \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha \sqrt{1 + \dfrac{2qEd}{mv^2 \operatorname{sen}^2\alpha}}$.

7.1.5. En 2 veces.

7.1.6. $K = qEl/2 \cos^2\alpha\ (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$.

7.1.7. $N = neUlt^2/2m_e vd$.

7.1.8. $q = 10^{-17}$ C.

7.1.9. $\beta = \operatorname{arctg}(\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha}/\cos\alpha)$.

7.1.10*. $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \sqrt{1 + e(\varphi_2 - \varphi_1)/m_e v^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$.

7.1.11. $U \approx 19$ kV.

7.1.12*. $\lambda = U/2 \ln(R_2/R_1)$.

7.1.13. La velocidad no cambiará, en tanto que el tiempo del vuelo del positrón será mayor. El positrón incluso puede no alcanzar el punto B, si su energía cinética inicial $K_0 < e\varphi_0$.

7.1.14*. $t' = t\sqrt{3}$.

7.1.15*. $v' = v\sqrt{mQ/Mq}$.

7.1.16. $k = \dfrac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{l-R} - \dfrac{4}{l}\right)$. La condición de que la energía sea mínima consiste en que el electrón llegue con velocidad nula al punto central del segmento que une los centros de las esferas.

7.1.17*. $t = \dfrac{2R}{v}\left[1 - \dfrac{qQ(m+M)}{2\pi\varepsilon_0 RmMv^2}\right]^{-1/2}$.

7.1.18. $v = \sqrt{qEl/m}$.

7.1.19. $T = 2\pi\sqrt{ml/2qE}$.

7.1.20. a) $T = 2\pi\sqrt{ml/(mg + QE)}$, para $mg + QE > 0$; b) $T = 2\pi \times \sqrt{ml/\sqrt{(mg)^2 + (QE)^2}}$.

7.1.21. $\omega = \sqrt{Qq/2\pi\varepsilon_0 Ml^3}$.

7.1.22. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l} - \dfrac{qQ(a+l)}{4\pi\varepsilon_0 ma^3 l}}$, si $\dfrac{qQ(a+l)}{4\pi\varepsilon_0 a^3} < mg$.

7.1.23*. $T = 2\pi\left(\dfrac{g}{R} + \dfrac{qQ}{32\pi\varepsilon_0 mR^3}\right)^{-1/2}$ para $\dfrac{qQ}{32\pi\varepsilon_0 R^2} > -mg$.

7.1.24*. $\Delta r = \pi r_0 R(m_e v^2)^2/2e^2 C$.

7.1.25. $x_1 = 17{,}5$ h, $x_2 = 175$ h.

7.1.26*. $\alpha = \pi/4$, $\delta \approx \dfrac{4K}{eE}(\Delta\alpha)^2$.

7.1.27*. $x = v\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{2m_e\varepsilon_0}{e\varphi}}$.

7.1.28*. El impulso que adquieren los electrones en dirección al eje es proporcional a la distancia entre aquéllos y este. Por eso, independientemente de estas distancias, todos los electrones cortan el eje en un mismo punto.

7.1.29. $x = fU/(U - f)$.

§ 7.2. Movimiento en un campo eléctrico alterno

7.2.1. $t = 2m_e Ul/eE\tau$.

7.2.2. a) $\sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}} - \dfrac{e\Delta U\tau}{m_e l} \leqslant v \leqslant \sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}} + \dfrac{e\Delta U\tau}{m_e l}$.

b) $v_1 = \sqrt{\dfrac{2e(U + \Delta U)}{m_e}}$; $v_2 = \sqrt{\dfrac{2e(U - \Delta U)}{m_e}}$ para $\Delta U < U$.

7.2.3. $\nu \approx 10^9$ Hz.

7.2.4. $\alpha \approx 1/U$.

7.2.5. a) $S = El^2/4Ud$. b) $S = 0{,}09$ mm^2.

7.2.6. $e/m_e = l^2f^2/2U\ (n - 1/2)^2$, donde n es un número entero positivo.

7.2.7. Una circunferencia de radio de 5 cm.

7.2.8. Cuando $v \gg 1/\tau$, donde τ es el tiempo en que se vence la distancia entre las placas.

7.2.9. $U_0 = \pi\delta v\tau/2S$.

7.2.10*. $A = eE_0/m_e \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$.

7.2.11*. $\varepsilon = 1 + 4\pi e^2 n/m_e (\omega^2 - \omega_0^2)$, donde n es la cantidad de las moléculas en unidad de volumen.

7.2.12. $v_m = eE_0 \cos \varphi/m_e\omega$.

7.2.13*. $p = 2qE_0/\omega$.

7.2.14*. $K = 400$ eV.

7.2.15*. Debido al escape de los electrones, acelerados por el campo eléctrico (véase el problema 7.2.12), el potencial de la descarga U aumenta hasta que se igualen las velocidades medias de los iones y electrones más rápidos, que participan en la descarga. El potencial estacionario de la descarga $U \approx \approx \frac{2e}{m_e}\left(\frac{U_0}{\omega d}\right)^2$ y la energía de los iones $K \approx \frac{2}{m_e}\left(\frac{eU_0}{\omega d}\right)^2$.

7.2.16*. $\Delta\alpha = \pm \arctg \left\{\frac{U_0}{d\omega}\sqrt{\frac{2e}{m_e U}}\left[1 - \cos\left(\omega l \sqrt{\frac{m_e}{2eU}}\right)\right]\right\}$.

7.2.17. a) $v = \omega l/2\pi n$, donde n es un número entero positivo; b*) $N = 4\pi e l^2 n'/m_e\omega^2 d$.

§ 7.3. Interacción de las partículas cargadas

7.3.1. $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e r}}\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}$.

7.3.2. $v = \sqrt{e^2(4 + \sqrt{2})/8\pi\varepsilon_0 m_e a}$.

7.3.3*. $v_p/v \approx \sqrt{m_e/m_p}\,(4\sqrt{2} + 1) \approx 0{,}01$. Para la estimación puede considerarse que los positrones ligeros se retiran a una distancia grande antes de que los protones partan del punto.

7.3.4. $r = e^2/4\pi\varepsilon_0 m_e v^2$.

7.3.5. $r = e^2/\pi\varepsilon_0 m_e (v_1 + v_2)^2$.

7.3.6. $v = \sqrt{q_1 q_2 (m_1 + m_2)/2\pi\varepsilon_0 m_1 m_2 (R_1 + R_2)}$.

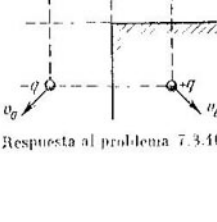
7.3.7. $r = ae^2/(e^2 + 4\pi\varepsilon_0 m_e v^2 a \cos^2\alpha)$.

7.3.8*. $\alpha = \pi/2$.

7.3.9*. $v = \sqrt{q^2/8\pi\varepsilon_0 md}$.

7.3.10*. $v = v_0\sqrt{1 - \frac{q^2(2\sqrt{2} - 1)}{8\pi\varepsilon_0 m v_0^2 a}}$

para $\frac{mv_0^2}{2} \geqslant \frac{q^2(2\sqrt{2} - 1)}{16\pi\varepsilon_0}$. Si en lugar del ángulo diedro se pone en el punto A la carga $+q$, en la zona fuera del conductor el campo eléctrico y, por lo tanto, las fuerzas no cambian. Ello permite examinar el movimiento del sistema de cuatro cargas, mostrado en la figura,



Respuesta al problema 7.3.10*.

7.3.11. $v = \sqrt[4]{4e^2r^2/\pi\varepsilon_0 m_e (4r^2 + R^2)^{3/2}}$.

7.3.12. $K_{\min} = Ze^2/8\pi\varepsilon_0 r$.

7.3.13*. $K_{\min} = e^2(2 - \sqrt{2})/4\pi\varepsilon_0 r$.

7.3.14*. $n = (\sqrt{2}-1)\, m/M + \sqrt{2}$.

7.3.15*. $v_{min} = 2v$.

7.3.16. Es imposible.

7.3.17*. $r_{min} = \dfrac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 m_p v_0^2} + \sqrt{\rho^2 + \left(\dfrac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 m_p v_0^2}\right)^2}$.

7.3.18*. $t = 2\sqrt{2}\, t_0$.

7.3.19. $v \geqslant \sqrt{qQ\,(m+M)/2\pi\varepsilon_0 R m M}$.

7.3.20. $v = \dfrac{mv_0}{m+M} + \sqrt{\left(\dfrac{Mv_0}{m+M}\right)^2 - \dfrac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 R m (m+M)}}$.

7.3.21* $v = \sqrt{3qQ\,(m+M)/4\pi\varepsilon_0 m M R}$.

7.3.22*. $v_1 = \sqrt{q^2/6\pi\varepsilon_0 m l}$; $v_2 = v_3 = \sqrt{q^2/24\pi\varepsilon_0 m l}$.

7.3.23. $v = \sqrt{q^2 n\,(2R-l)/2\pi\varepsilon_0 R l M\ (M+2m)}$.

7.3.24. $W = 3q^2/32\pi\varepsilon_0 l$.

7.3.25. $v_\infty = v\sqrt{1+q^2/4\pi\varepsilon_0 R m v^2}$

7.3.26. $v_1 = \dfrac{v}{2}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{(Q-q)^2}{8\pi\varepsilon_0 R m v^2}}\right)$;

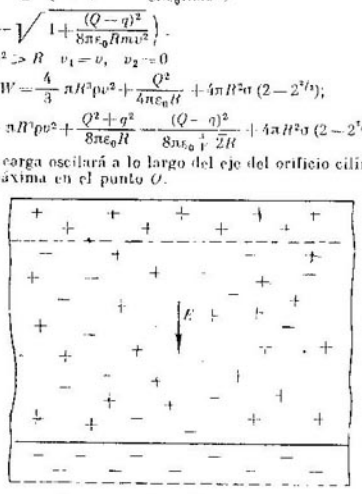
$v_2 = \dfrac{v}{2}\left(1-\sqrt{1+\dfrac{(Q-q)^2}{8\pi\varepsilon_0 R m v^2}}\right)$.

Para $Qq/2\pi\varepsilon_0 m v^2 > R$ $v_1 = v$, $v_2 = 0$

7.3.27. a) $W = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho v^2 + \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + 4\pi R^2 \sigma\,(2-2^{2/3})$;

b) $W = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho v^2 + \dfrac{Q^2+q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - \dfrac{(Q-q)^2}{8\pi\varepsilon_0 \sqrt{2}R} + 4\pi R^2 \sigma\,(2-2^{2/3})$.

7.3.28. La carga oscilará a lo largo del eje del orificio cilíndrico. Su velocidad será la máxima en el punto O.



Respuesta al problema 7.3.34*.

7.3.29. $v = \sqrt{2gh\,(1 - N\sigma^2/4\pi\varepsilon_0 mg)}$, si $\sigma < \sqrt{2\varepsilon_0 mg/N}$; $v = g\sqrt{2\varepsilon_0 mh/\sigma^2 S}$, si $\sigma > \sqrt{2\varepsilon_0 mg/S}$.

7.3.30. $v = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$.

7.3.31. $v = v_0 \sqrt{1 - \frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 m v^2} \ln(R_1/R_2)}$.

7.3.32. $x = \frac{R}{2}\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgR^2} - 1\right)$, $v_{\max} = \sqrt{\mu g R}\left(\frac{Q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 \mu mgR^2}} - 1\right)$.

7.3.33*. $T = 2\pi\sqrt{4\pi\varepsilon_0 ml^3}/\sqrt{2}\,q^2$.

7.3.34*. a) Los electrones e iones se separan por completo. El campo eléctrico de los iones de intensidad $E_i = neh/2\varepsilon_0$ detendrá los electrones una vez pasado el tiempo $t \approx 2\varepsilon_0 m_e v/e^2 hn$; $v \approx e^2 hn/8\varepsilon_0 m_e v$.

b) Parte de los iones y electrones forma en la superficie de separación de la capa unas zonas cargadas (véase la figura), cuyo campo eléctrico provoca un movimiento armónico de la masa principal de los electrones con el período $T = 2\pi\sqrt{\varepsilon^2 n/\varepsilon_0 m_e}$. Por eso los electrones se detendrán al pasar el tiempo $t = T/4 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon^2 n}{\varepsilon_0 m_e}}$; $v = \frac{l}{4t}$.

7.3.35*. $n = \frac{4q^2(l-a)}{al\left[u^2 + v^2 + 2uv\cos(\alpha+\beta) - \frac{l^2}{a^2}(u\operatorname{sen}\alpha - v\operatorname{sen}\beta)^2\right]}$.

Capítulo 8

CORRIENTE ELÉCTRICA

§ 8.1. Corriente. Densidad de corriente. Corriente en el vacío

8.1.1. a) $I = 0{,}02$ A. b) $I = 0{,}0012$ A.

8.1.2. $v = It/q$.

8.1.3. $I = 1{,}3\cdot 10^{-4}$ A.

8.1.5. $v_m = 3\cdot 10^{-3}$ m/s; $v_s = 3\cdot 10^5$ m/s.

8.1.6. $j = ev$; está dirigida por la normal a la hoja.

8.1.7. $j = -en_e u$.

8.1.8. $j_1 = \frac{2I}{4\pi r^2}\frac{l}{r}$; $j_2 = \frac{2I}{4\pi r^2}\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}$, donde l es la distancia entre el punto central del segmento AB y el punto en que se determina j; r, la distancia de A o B a dicho punto. En el primer caso la densidad de corriente j es normal al plano de simetría y en el segundo, se encuentra en él. Las corrientes totales a través de los planos son iguales a I y 0, respectivamente.

8.1.9. $I = 10$ A.

8.1.10. $t = 0{,}8\cdot 10^{-6}$ s.

8.1.11. $\rho = \mu/v$.

8.1.12. $E = 1{,}5\cdot 10^6$ V/m. $l \approx 0{,}1$ m.

8.1.13*. a) $\rho_1 = \frac{\rho_0 v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2eEx/m_e}}$, donde x es la distancia hasta la rejilla delantera.

b) $\rho_2 = 2\rho_1$ para $x < x_0 = m_e v_0^2/2eE$; $\rho_2 = 0$ para $x > x_0$. Usando la dependencia entre ρ_2 y x, se determina la intensidad máxima del campo de la carga entre las rejillas:

$$E_1 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_0^{x_0}\rho_2\,dx = \frac{\rho_0 m_e v_0^2}{\varepsilon_0 e E}.$$

Si $E_1 \ll E$ puede menospreciarse la interacción. Cuando E_1 es comparable con E, es decir, $\rho_0 m_e v_0^2/\varepsilon_0 eE \approx E$, es indispensable tenerla en cuenta. De aquí viene la estimación $\rho_0 \approx \varepsilon\varepsilon_0 E^2/m_e c_0^2$.

8.1.15. Cuanto más alta sea la meseta en las curvas, tanto más elevada es la temperatura

8.1.16. Los electrones que atraviesan la superficie de separación de la capa, no vuelven al cátodo, si el campo en dicha superficie es nulo.

8.1.17*. $\rho = \frac{I}{S}\sqrt{\frac{m_e d}{2eV}}\frac{1}{\sqrt{x}} = 1{,}75\cdot10^{-6}\frac{1}{\sqrt{x}}$ C/m^3. Para $x \to 0$ la densidad de la carga $\rho \to \infty$, a pesar de ello, la carga correspondiente a la unidad de área, $\sigma = \int_0^d \rho\,dx$ está limitada: $\sigma = 3{,}5\cdot10^{-6}\sqrt{d}$. Por eso estará limitado también el valor máximo de la intensidad del campo para la carga espacial: $E_1 = \sigma/2\varepsilon_0$. En el caso dado $E_1 \ll V/d$ y puede menospreciarse la influencia de la carga espacial.

8.1.18*. $n = \frac{4}{3}$; $I = \frac{4}{9}\varepsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m_e}}\frac{V^{3/2}S}{d^2}$, $I = \beta S$.

8.1.19*. La densidad de la carga aumentará n veces, mientras que la corriente, $n^{3/2}$ veces.

§ 8.2. Conductibilidad. Resistencia. Fuente de fem

8.2.1*. a) $\lambda = e^2 n_e \tau/2m_e$. b) $\tau \approx 5\cdot10^{-14}$ s.

8.2.2* $\lambda = 0{,}3\cdot10^{-8}$ S/m; $\Delta N/N = 1{,}5\cdot10^{-12}$.

8.2.3. $f = -ne^2 t/\lambda$; la fuerza f se refiere a una partícula.

8.2.4. $I = \frac{m_e}{e}\omega B\lambda S T^{-1} = 1{,}7$ mA.

8.2.5. La reestructuración del campo transcurre a velocidad de la luz.

8.2.6*. Para estos metales las relaciones $\varkappa/\lambda$ son casi iguales. La estimación teórica de $\varkappa/\lambda = \pi^2 k^2 T/3e^2$, donde k es la constante de Boltzmann; T, la temperatura, e, la carga de los portadores de corriente.

8.2.7. $E = j/\lambda$; $U_1 = \frac{jl}{\lambda}\cos\alpha$.

8.2.8. $\sigma = \varepsilon_0 j\,(1/\lambda_1 - 1/\lambda_2)$.

8.2.9. $\operatorname{tg}\alpha_2 = (\lambda_2/\lambda_1)\operatorname{tg}\alpha_1$; $\sigma = \varepsilon_0 j\cos\alpha_1\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$.

8.2.10. $\rho = \varepsilon_0 l/\lambda a$.

8.2.11*. Según el teorema de Gauss para la superficie que abarca totalmente la inclusión, tenemos

$$q = \varepsilon_0 \oint E\,dS = \frac{\varepsilon_0}{\lambda}\oint j\,dS \quad (\lambda = \text{const}).$$

Ya que la corriente total $\oint j\,dS = 0$, debido al estado estacionario, la carga sumaria en la superficie de separación de la inclusión $q = 0$. El campo de semejante sistema de cargas a distancias grandes de ésto tiene la forma de campo de un dipolo.

8.2.12. a) $I = Q_0/\rho\varepsilon_0$, b) $Q = Q_0 \exp(-t/\rho\varepsilon_0)$. La carga resulta encontrarse en la superficie del conductor. No.

8.2.14. $I = \lambda S U/l$; $R = l/\lambda S$.

8.2.15. $R_I = \dfrac{l}{\pi r^2}\left(\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}\right)$, $R_{II} = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{l_1}{r_1^2\lambda_1}+\dfrac{l_2}{r_2^2\lambda_2}\right)$; $I_I = U/R_I$, $I_{II} = U/R_{II}$ para $|r_2 - r_1| \ll l_1, l_2$.

8.2.16. $R = 5{,}66\ \Omega$.

8.2.17. $I = 4\pi a\lambda V$; $R = 1/4\,\pi a\lambda$.

8.2.18. a) $R = 0{,}13\ \Omega$. b) En la investigación del plasma, del grado de ionización de la atmósfera, de la sangre, etc.

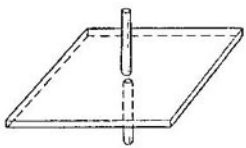
8.2.19. $R = \dfrac{1}{4\pi\lambda}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$; $I = \dfrac{q\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0}$.

8.2.20*. $C = \varepsilon\varepsilon_0/\lambda R$, no.

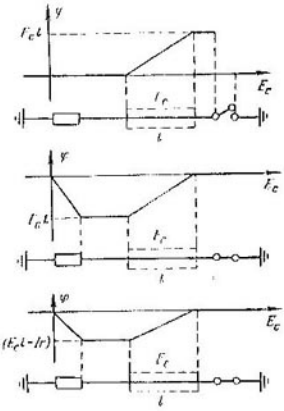
8.2.21*. Cuando los electrodos entran en contacto con los centros de los lados de la lámina.

8.2.22. $K = \dfrac{1}{2}\,m_e\left(\dfrac{I}{en_e S}\right)^2 = 2\cdot 10^{-10}$ eV.

8.2.23. a) $\varphi = qvlt/l$; b) $\varphi = Ft/q$.



Respuesta al problema 8.2.21*.



Respuesta al problema 8.2.26.

8.2.24. $U = W/e$. Para $R \geqslant W/e^2 v$, $I_{máx} = ev$. Cuando $R < W/e^2 v$, la corriente no varía al cambiar la carga.

8.2.25*. $I = I_0\left(1 - \sqrt{U/U_0}\right)$, cuando $U_0 > U > 0$; $I = I_0$, si $U < 0$; $I = 0$, siendo $U > U_0$.

8.2.26. Véase la figura. $W = E_c l$.

8.2.27. $\mathscr{E} = 1{,}13$ V.

8.2.28. $\mathcal{E} = 1{,}07$ V. Tiene lugar la absorción de calor desde el medio ambiente.

8.2.29. $\nu = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ mol.

8.2.30*. El condensador no se descargará por entero a causa de la fem química, que aumenta en caso de la conexión en serie.

8.2.32*. $k = U/2\mathcal{E}$.

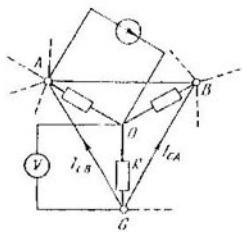
§ 8.3. Circuitos eléctricos

8.3.1. $r = 1$, 5 y 50 kΩ.

8.3.2. $r = 20$ Ω.

8.3.3. $U = 1$ kV.

8.3.4. En los circuitos a), b), c) las indicaciones de los aparatos disminuirán, en el circuito d) aumentará y en el circuito f) no cambiarán. En el circuito e) las indicaciones del amperímetro superior aumentarán y del inferior, no cambiarán.



Respuesta al problema 8.3.10*.

8.3.5. a) $\Delta U/U = R/(R + r)$; b) $\Delta I/I = r/(R + r)$.

8.3.6. $I_1/I_2 \approx 0{,}2$.

8.3.7*. La resistencia del brazo que se une al dispositivo $R_1 \approx 12{,}2$ Ω; la resistencia del segundo brazo, $R_2 \approx 54{,}2$ Ω.

8.3.8. $U = 48$ V; $I = 15$ A.

8.3.9. $r_x = rR_2/R_1$, se conservará.

8.3.10*. Aduzcamos la parte del circuito que incluye la resistencia buscada. A los nodos A y O conectamos una pila y a los nodos C y O, un voltímetro. Los nodos A, B y C se unen mediante cables (en lugar de cualquiera de ellos puede conectarse un amperímetro sin cambiar las corrientes). La corriente a través de la resistencia R es igual a $I_{CA} + I_{CB}$. Entonces $R = V/(I_{CA} + I_{CB})$, donde V es la indicación del voltímetro.

8.3.11. $R = 7$ Ω.

8.3.12*. a) $r = (\sqrt{3})R$. b) $r = (\sqrt{3}-1)R$. c) $I_n = I(2-\sqrt{3})^{n-1}$ en las resistencias horizontales, $I'_n = I(2-\sqrt{3})^{n-1}(\sqrt{3}-1)$ en las verticales, n es el número de la resistencia si las contamos desde los bornes, $R_c = (\sqrt{3}+1)R$.

8.3.13*. $R_1 : R_2 = 8{,}1$.

8.3.14. a) $U = \mathcal{E} - I(r + R)$; b) $U = -\mathcal{E} - I(r + R)$; c) $U = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - I(r_1 + r_2 + R)$; d) $U = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - I(r_1 + r_2 + R)$.

8.3.15. $I = \mathcal{E}\dfrac{R_1R_2}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}$; $I_1 = \mathcal{E}\dfrac{R_2}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}$. Al desconectar R_2, la corriente I_1 aumentará $\dfrac{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}{R_2(R_1 + r)}$ veces. Para $r \ll R_1$, R_2 la corriente I_1 aumentará $1 + r/R_2$ veces.

8.3.16. $\mathcal{E} = 34{,}3$ V; $r = 1{,}43$ Ω.

8.3.17. Una pila con fem $\mathcal{E} = 10$ V y resistencia interna $r = 14$ Ω.

8.3.18. Véase la figura.

8.3.19. $I = 10$ A, $r = 20$ Ω; $\mathcal{E} = 200$ V, $r = 20$ Ω.

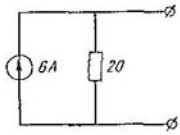
8.3.20. $I = 80$ A.

8.3.21. $I_2 = I_3R_3/R_2$; $I_1 = I_3(R_2 + R_3)/R_2$, $U = I_3(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)/R_2$.

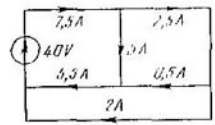
8.3.22. Véase la figura.

8.3.23. a) $U = 5$ ir; $R = {}^6/_5\, r$, $I = 6i$. b) Véase la figura. $I = {}^3/_2\, i$; $R = {}^{12}/_7\, r$. c) $R_{AB} = {}^{13}/_7\, r$; $R_{CD} = {}^6/_7\, r$.

8.3.24. $I = 8$ A.
8.3.25*. a) $I = {}^1/_2\, i$; $R = {}^1/_2\, r$; $R_1 = {}^1/_3\, r$. b) $R = {}^2/_3\, r$.
8.3.26. $\mathscr{E} = (\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1)/(r_1 + r_2) = 24$ V, $r = r_1 r_2/(r_1 + r_2) = 2{,}4\ \Omega$.

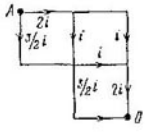


Respuesta al problema 8.3.18.

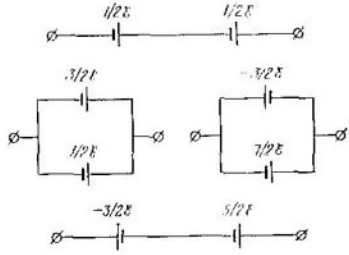


Respuesta al problema 8.3.22.

8.3.27. Véase la figura.
8.3.28. Disminuirá 3 veces.
8.3.29. $V = 0$, $I = 0{,}75$ A.
8.3.30. $V = 0{,}75$ V.
8.3.31. Dentro de 12, 54 y 27 min.
8.3.32. $N = I^2R$.
8.3.33. $N_2 = N\,(N_1 - N)/N_1$.
8.3.34. $R = 9\,(n - 1)\,r$.
8.3.35. $r = \sqrt{R_1 R_2}$.
8.3.36. 2 y 100 V; 20 y 0,1 W. Las corrientes casi no cambiarán, mientras que las potencias aumentarán casi al doble.



Respuesta al problema 8.3.23



Respuesta al problema 8.3.27.

8.3.37. $S = 8{,}5$ mm², aproximadamente 10 veces.
8.3.38. $N = (\mathscr{E} - Ir)\,I$; $R = r$.
8.3.39. $N_1 = 125$ W; $N_2 = 80$ W; $N_3 = 45$ W.
8.3.40*. Para $r = R$.
8.3.41. $N_u = (U - \mathscr{E})\,\mathscr{E}/r$; $N_t = (U - \mathscr{E})^2/r$. Si $\mathscr{E} > U/2$, la potencia útil supera la térmica.
8.3.42. $N = 4$ W.
8.3.43. $N = \lambda C U^2/\varepsilon_0$.
8.3.44. $N = I\,(m_e v^2/2e - IR)$.
8.3.45*. $q = 4\pi^2 r_0 e^3 e n_e R v$, $v \gg a^2 e^2 n_e R/m_e$.
8.3.46*. $T = T_0 + R_0 I^2/(\alpha - I^2 R_0 \alpha)$.

§ 8.4. Condensadores y elementos no lineales en los circuitos eléctricos

8.4.1. a) $q = 8 \cdot 10^{-4}$ C. b) $V = 60$ V, c) 100 V en el condensador superior y 50 V en cada uno de los inferiores.

8.4.2. $\varphi_A = \varphi_B + 2\left(1 - \frac{x}{2}\right)\sqrt{\frac{k\alpha}{\varepsilon_0 S}}$.

8.4.3. $\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)$. Es necesario medirla con ayuda del voltímetro electrostático. $q_1 = C_1 R_1 \mathcal{E}/(R_1 + R_2)$; $q_2 = C_2 R_2 \mathcal{E}/(R_1 + R_2)$. En este caso disminuirá la influencia del voltímetro sobre el circuito eléctrico.

8.4.4*. $Q_1 = \frac{CU^2}{4}\frac{R_1}{R_1 + R_2}$; $Q_2 = \frac{CU^2}{4}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

8.4.5. $q = A - q^2/C$.

8.4.6. $q = C\mathcal{E}$; $Q = C\mathcal{E}^2/4$.

8.4.7. $Q = C(\mathcal{E} - U_0)^2/2$, $\mathcal{E} > U_0$; $Q = 0$, $\mathcal{E} < U_0$.

8.4.8. $W = C(U - \mathcal{E})\mathcal{E}$; $Q = C(U - \mathcal{E})^2/2$.

8.4.9*. Primero deberá cargarse de un elemento, luego de dos unidos en serie, etc. Entonces las pérdidas de dicha parte serán de $1/n$.

8.4.10*. $N_g = Iq/C > N_c = Iq/2C$. Estas magnitudes se diferencian debido al trabajo que se realiza para cambiar la capacidad del condensador.

8.4.11. Dentro de $\tau \approx 10^{-3}$ RC.

8.4.12*. $q = C\frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}$; $q = C\frac{\mathcal{E}_1 R_2 + k\mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}$.

8.4.13*. $U = U_0 R\tau/(rT + R\tau)$.

8.4.14*. $\frac{dU}{dt} = -\frac{U}{RC}$; $U = U_0 \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)$, $I = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)$.

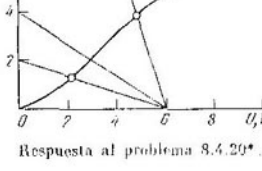
8.4.15. $R < 40$ kΩ.

8.4.16*. $\nu = \left(RC \ln \frac{U - U_0}{U - U_1}\right)^{-1}$.

8.4.17*. a) $I = qv/d$. b) No.

8.4.18. $I = \varepsilon_0 (v - 1)\mathcal{E}bl/d$.

8.4.19. $I = \frac{1}{2\alpha R^2} + \frac{\mathcal{E}}{R} - \left[\left(\frac{1}{2\alpha R^2} + \frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{R^2}\right]^{1/2}$.



Respuesta al problema 8.4.20*.

8.4.20*. En la característica tensión-corriente trazamos la recta $I = (\mathcal{E} - U)/R$; el punto de su intersección nos da la corriente 2 mA. Trazando las rectas correspondientes a través de los extremos de la sección rectilínea de la característica, encontramos que para $R \leq 0{,}3$ kΩ y $R \geq 3$ kΩ el diodo cesa de funcionar en la sección rectilínea.

Capítulo 9

CAMPO MAGNÉTICO PERMANENTE

§ 9.1. Inducción del campo magnético. Influencia del campo magnético sobre la corriente

9.1.1. $B = 100$ T.

9.1.2. $B = 20$ T.

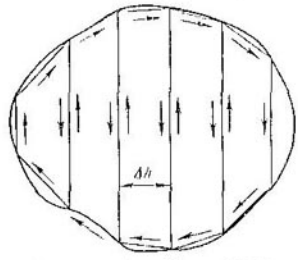
9.1.3. a) $F_1 = F\dfrac{I_1}{I}\sqrt{1+\dfrac{I_2^2}{I^2}-2\dfrac{I_2}{I}\cos\varphi}$; b*) $F_2 = F\cdot 2\dfrac{RI_2}{lI}$.

9.1.4*. $\Delta h = a\lambda UB/\rho g$.

9.1.5. $\alpha = 45°$.

9.1.6. $I = \dfrac{mg}{2nB}\operatorname{tg}\alpha$.

9.1.7. c*) El marco con corriente se divide en microcontornos trapezoidales con corriente I de la manera mostrada en la figura. El momento de fuerza



Respuesta al problema 9.1.7*

que actúa sobre todos los microcontornos para $\Delta h \to 0$ coincide en el límite con el momento de fuerzas que actúa sobre el marco con corriente:

$$N \xrightarrow[\Delta h\to 0]{} \left[\sum_i B\times \Delta M_i\right] = \left[B\times \sum_i \Delta M_i\right] \xrightarrow[\Delta h\to 0]{} [B\times M].$$

9.1.8. $\operatorname{tg}\alpha = IB/\rho g$.

9.1.9. a) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{IB}{2\rho g}$; b*) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\pi(4+\pi)IB}{4(1+\pi)(2+\pi)\rho g}$.

9.1.10. $N = {}^1/_2\, B^2 IR(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$

9.1.11. $a = \dfrac{2\pi RIB}{m}\operatorname{sen}\alpha$

9.1.12*. $B = F/RI$.

§ 9.2. Campo magnético de una carga en movimiento. Inducción del campo magnético de la corriente lineal

9.2.2. $B = \dfrac{\mu_0 Qv}{4\pi r^2}\operatorname{sen}\alpha$

9.2.3. $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r^3}[l\times r]$.

9.2.4. a) $B = \mu_0 nv/2\pi r$, donde r es la distancia hasta el hilo. b) $B = \mu_0 I/2\pi r$, donde r es la distancia hasta el cable.

9.2.5. a) $I = 1$ A. b) $\mu = 1{,}25$.

9.2.6. $B = 1{,}88 \cdot 10^{-5}$ T.

9.2.7. $B = \mu_0 (I_1 - I_2)/2\pi l$ sen $(\alpha/2)$.

9.2.8. $B = \mu_0 I \sqrt{5}/8\pi l$, donde l es la distancia hasta el punto de intersección de los cables.

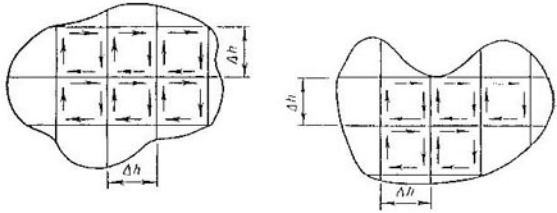
9.2.9. a) $B_0 = \dfrac{\mu_0 I (\pi - 1)}{2\pi R}$; $B_h = \dfrac{\mu_0 I}{2} \times$

$$\times \left[\frac{4}{\pi^2 (R^2 + h^2)} + \frac{R^4}{(R^2 + h^2)^3} - \frac{2R^2}{\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} \right]^{1/2}.$$

b) $B = \dfrac{\mu_0 I}{4R}$.

9.2.10*. $B = \mu_0 I \sqrt{8}/\pi a$.

9.2.11*. a) $B = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \alpha}$, $M = Iab$.



Respuesta al problema 9.2.11*b.

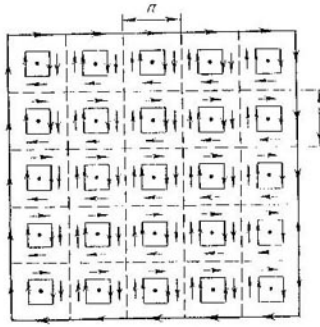
b) Dos contornos planos con corriente I que tienen diversa forma, pero la misma área, los dividimos en microcontornos cuadrados con corriente I de la manera mostrada en la figura. La inducción del campo magnético, creado por estos microcontornos, para $\Delta h \to 0$ coincide con la inducción de los contornos, dentro de los que se encuentran los microcontornos. A distancias grandes los campos magnéticos de los contornos en cuestión van a coincidir, ya que ese campo depende solamente de la cantidad de microcontornos que en el límite $\Delta h \to 0$ para los dos contornos será igual.

9.2.12*. a) A distancias grandes la inducción del campo magnético $N = n^2$ de los microcontornos (microcircuitos) de área s_0 con corriente I_0 y la inducción del campo magnético de los contornos $a \times a$ con corriente $I = I_0 s_0/n^2 = M_0/a^2$ serán idénticas. Pero el campo magnético de los nuevos contornos coincide con el campo magnético del cuadrado grande con corriente I. El momento magnético de este cuadrado

$$M = I (na)^2 = \frac{M_0}{a^2} (na)^2 = n^2 M_0 = N M_0,$$

b) El campo magnético de una lámina fina es próximo al campo magnético de la corriente de contorno $I = hM$, donde M es el momento magnético de la unidad de volumen de la substancia de la lámina. Pero B está ligado con I

mediante la relación $B = \mu_0 I \sqrt{8}/\pi a$ (véase la respuesta para el problema 9.2.10*). Por eso $M = \pi a I/\mu_0 h \sqrt{8}$.



Respuesta al problema 9.2.12*.

9.2.13. $B = \mu_0 M R^2 h l/2 (R^2 + l^2)^{3/2}$.

9.2.14. a) $I_1 = I \sqrt{10}$; b*) $I_2 = 2I \sqrt{10}$.

§ 9.3. Campo magnético de una corriente distribuida por un plano o volumen

9.3.1. $B = {}^1/_2 \mu_0 \sigma v$.

9.3.2. $B = 10^{-10}$ T.

9.3.3. a) $B = {}^1/_2 \mu_0 i$. b) Entre los planos: $B_1 = {}^1/_2 \mu_0 i$, $B_2 = 0$, $B_3 = {}^1/_2 \mu_0 i$; fuera de los planos: $B_1' = {}^3/_2 \mu_0 i$, $B_2' = \mu_0 i$, $B_3' = {}^1/_2 \mu_0 i$. c) Fuera de los planos: $B_1 = {}^1/_2 \mu_0 i$, $B_2 = 0$, $B_3 = {}^1/_2 \mu_0 i$; entre los planos: $B_1' = {}^3/_2 \mu_0 i$, $B_2' = \mu_0 i$, $B_3' = {}^3/_2 \mu_0 i$.

9.3.4. a) $F = \mu_0 I^2/2b$; b*) $\Delta = \mu_0 a I^2/12\ Eb^2$; c) $B_1' \approx 10$ T, $B_2 \approx 35$ T.

9.3.5. a) $B_\parallel = \mu_0 \varepsilon_0 E_\perp v = \mu_0 \sigma v \Omega/4\pi = \mu_0 i \Omega/4\pi$, donde $E_\perp = \sigma/4\pi\varepsilon_0$ es la componente de la intensidad del campo eléctrico para los portadores de corriente; σ, su densidad superficial y v, su velocidad.

b) $B = \mu_0 i/2$.

9.3.6*. a) $B = \mu_0 i$; no depende. b) $T = \mu_0 n R I^2/2$.

9.3.7*. a) $B_\parallel = \mu_0 i \Omega/4\pi$, donde Ω es el ángulo sólido, bajo el cual se ve la superficie del cilindro (véase el problema 9.3.5a). Para cualquier punto en el extremo del cilindro el ángulo sólido $\Omega = 2\pi$, por eso $B_\parallel = \mu_0 i/2$.

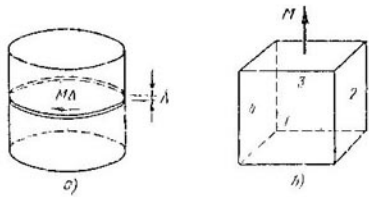
b) $$B = \frac{1}{2}\mu_0 i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{x_1}\right)^2}}\right),$$

$$B \xrightarrow[x_1 \to \infty]{} \frac{1}{4}\mu_0 i \left(\frac{R}{x_1}\right)^2.$$

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 i \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{x_2}\right)^2}}\right),$$

$$B \xrightarrow[x_2 \to \infty]{} \mu_0 i.$$

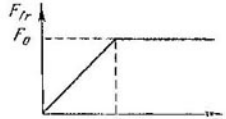
9.3.8*. a) El campo magnético del cilindro se compone de los campos magnéticos de los discos finos con grosor Δ en que puede dividirse dicho cilindro. Pero el campo magnético de cada disco coincide con el campo magnético de la corriente que fluye con la densidad lineal M (M es el momento magnético de la unidad de volumen del hierro) por la superficie exterior del disco (véase la solución del problema 9.2.12*).



Respuesta al problema 9.3.8*.

b) La dirección del vector de inducción del campo magnético en el centro del cubo pequeño coincide con el sentido de imanación M. El módulo de este vector es tantas veces menor que el módulo del vector de inducción del campo magnético dentro de la barra, en cuantas veces $8\pi/3$ (el ángulo sólido bajo el que se ven las caras laterales del cubo $1-4$) es inferior a 4π. $n = 1{,}5$ veces.

c) La inducción del campo magnético dentro de una columna rectangular será tantas veces mayor que B_0, cuantas veces 4π supera el ángulo sólido, bajo el cual se ven las caras laterales de la placa desde su centro. $B = \pi a B_0/2 \sqrt{2}\, h$.



Respuesta al problema 9.3.14.

9.3.9. $B_\parallel = 6{,}28 \cdot 10^{-4}$ T, $B_\perp = 0{,}377$ T.

9.3.10. $\Delta B = B_0 \varkappa h/2R$.

9.3.11. a) $B = \mu_0 I x/2\pi r^2$, $0 < x < r$; $B = \mu_0 I/2\pi x$, $x > r$. b) $B = \mu_0 \pi j$, $x < a/2$; $B = \mu_0 a j/2$, $x > a/2$. c) $B_{\max} = \mu_0 NI/2\pi r$, $B_{\min} = \mu_0 NI/2\pi R$.

9.3.12. a) Sobre el plano $B = \mu_0 I/2\pi x$, las líneas de fuerza para el campo magnético coinciden con las líneas de fuerza para el conductor recto infinito; debajo del plano $B = 0$. b) Sobre el plano $B = \mu_0 I/2\pi x$; debajo del plano $B = \mu (I - I_1)/2\pi x$. c) Dentro del cable $B = \mu_0 I/2\pi x$; fuera del cable $B = 0$.

9.3.13*. $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \operatorname{tg} \beta/2$.

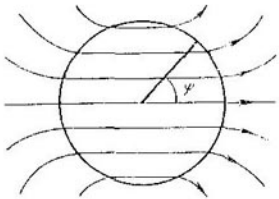
9.3.14. Véase la figura. $B_m = \mu_0 h/2$.

9.3.15. $B = \dfrac{\mu_0}{2} jx$, $0 < x < h/2$; $B = \dfrac{\mu_0}{2} jh \left(1 - \dfrac{h}{4x}\right)$, $x > h/2$, donde x es la distancia hasta el punto O.

9.3.16*. $B = \mu_0 jd/2$.

9.3.17*. a) $B = \mu_0 ja/2$; b) $i = 2B_0 \operatorname{sen} \varphi/\mu_0$, $\max i = 2B_0/\mu_0$. Véase la figura.

9.3.18*. Para determinar las corrientes superficiales equivalentes (véase la solución del problema 9.3.8* a) es necesario dividir el volumen del cilindro en capas finas, una de las cuales se muestra en la figura. Los planos de las capas



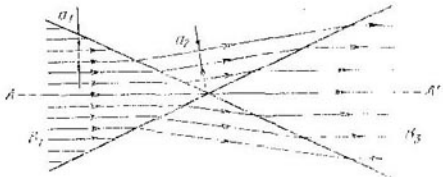
Respuesta al problema 9.3.17*b

Respuesta al problema 9.3.18*.

deben ser perpendiculares a la dirección de la imanación. $B = \frac{1}{2}\mu_0 M$ para $x < r$; $B = \frac{1}{2}\mu_0 M \left(\frac{r}{x}\right)^2$ para $x > r$.

§ 9.4. Flujo magnético

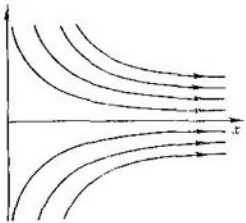
9.4.1. a) $\Phi = \sqrt{3}\,Ba^2/2$, b) $\Phi = BS \operatorname{sen} \alpha$.
9.4.2. $\Phi = \pi R^2 B\,(\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta)$.
9.4.6. $n = \operatorname{sen} \alpha / \operatorname{sen} \beta$, $i = B \cos \alpha\,(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)/\mu_0$



Respuesta al problema 9.4.7*.

9.4.7*. $B_2 = B_3 = B_1 \frac{a_1}{a_2} = \frac{\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos \alpha}}{2 \cos(\alpha/2)}$.
9.4.8. a) $B_r = \frac{1}{2} B_0 \frac{r}{x_0}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \frac{r}{x}$; véase la figura.
b) $B_r = \frac{1}{2} n B_0 \frac{r}{x_0} \left(\frac{r}{x_0}\right)^{n-1}$, $B_r = \frac{1}{2} r B_0 \frac{\partial f}{\partial x}$.

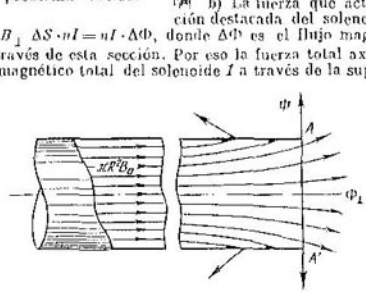
9.4.9. Puesto que el flujo magnético de la componente radial del campo fuera del cilindro se conserva, la inducción del campo magnético decrece como $\alpha R/x$, donde x es la distancia hasta el eje del cilindro, $\alpha = B_0 R/2x$ (B_0 es la componente radial de la inducción para el campo magnético cerca de la superficie del cilindro).



Respuesta al problema 9.4.8a.

9.4.10*. a) A una distancia suficientemente grande desde el extremo del cilindro la inducción del campo magnético $B_0 = \mu_0 i$, mientras que el flujo magnético en la sección es igual a $\pi R^2 B_0$. Una parte de este flujo (Φ_1) sale del cilindro a través de la sección AA', otra parte (Φ), a través de la superficie lateral: $\pi R^2 B_0 = \Phi_1 + \Phi$. De aquí $\Phi = \pi R^2 B_0 - \Phi_1$. Ya que $B_\perp = B_0/2$, entonces $\Phi_1 = \pi R^2 B_\perp = \pi R^2 B_0/2$ (véase la solución del problema 9.3.7* a) y $\Phi = \pi R^2 B_0/2 = \mu_0 \pi i R^2/2$.

b) La fuerza que actúa sobre la sección destacada del solenoide *2* en sentido axial, $\Delta F_{11} = B_\perp \Delta S \cdot nI = nI \cdot \Delta\Phi$, donde $\Delta\Phi$ es el flujo magnético desde el solenoide *1* a través de esta sección. Por eso la fuerza total axial $F_{11} = nI \cdot \Phi$, donde el flujo magnético total del solenoide *1* a través de la superficie del solenoide *2* $\Phi = \mu_0 \pi n I R^2/2$ (véase el problema a)). Ello significa que $F_{11} = \mu_0 \pi (nIR)^2/2$.



Respuesta al problema 9.4.10*a.

c) $B = \sqrt{2\mu_0 F/\pi R^2}$. d) $F = nI(\Phi_1 - \Phi_2)$.

9.4.11. a) $L = \mu_0 \pi (rR)^2/l^3$. b) $L = \mu_0 \pi n r^2$.

Capítulo 10

MOVIMIENTO DE LAS PARTICULAS CARGADAS EN CAMPOS COMPLEJOS

§ 10.1. Movimiento en los campos eléctrico y magnético

10.1.1. $R = 0{,}2$ m.

10.1.2. $R = 0{,}68$ m.

10.1.3. $T_1/T_2 = 1$, $R_1/R_2 = \sqrt{K_1/K_2}$.

10.1.4. $\omega = qB/m$.

10.1.5. $t = 2\pi m/qB$.

10.1.6. $K = 3\,(eBR)^2/4m_p$.

10.1.7. $\operatorname{sen}\alpha = eBl/m_e v$ para $eBl/m_e \leqslant v/l$; $\alpha = \pi$ para $eBl/m_e > v/l$.

10.1.8. $x_1 = 0{,}29$ m; $x_2 = 0{,}41$ m; $x_3 = 0{,}5$ m; $x_4 = 0{,}58$ m $\Delta l < 3{,}7$ mm.

10.1.9. $\Delta U/U_0 < 0{,}025$.

10.1.10*. A la distancia $x \approx 2mv/qB$ del punto A, $\Delta z \approx mv\,(\delta\alpha)^2/4qB$.

10.1.11. $R = \dfrac{mv\operatorname{sen}\alpha}{qB}$, $h = \dfrac{2\pi mv\cos\alpha}{qB}$.

10.1.12*. $x \approx 2\pi m_e v/eB$, $\Delta y \approx \pi m_e v\,(\delta\alpha)^2/2eB$.

10.1.13. a) Véase la figura. $B \geqslant 2\sqrt{2m_e K}/eR$. b) $P_2 > P_1$.

10.1.14. $B = \dfrac{m_e v}{eR} + \dfrac{e}{16\pi\varepsilon_0 vR}$. Es inestable.

10.1.15. $\omega \approx \omega_0 - eB/2m_e$.

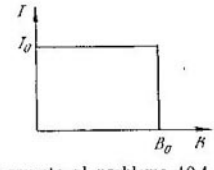
10.1.16. $V \approx 2Uh/R - Bh\sqrt{2eU/m_e}$.

10.1.17. a) $y = \dfrac{m_e E}{eB^2 l L}z^2$. b) $y \approx 1{,}1\cdot 10^{-4}\,\text{m}^{-1}\cdot z^2$.

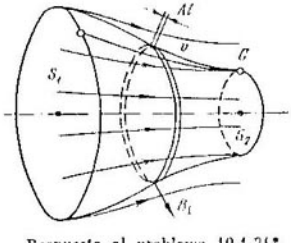
c) $y = \dfrac{m_e E}{eB^2 l L}z^2\sqrt{z^2 + \left(\dfrac{vBlL}{m_e c}\right)^2}$.

10.1.18. $t = \dfrac{nm_p}{c^2 BU}\left(\dfrac{c^2B^2R^2}{2m_p} - K\right)$.

10.1.19. $U = \dfrac{eB^2d^2}{2\pi^2 m_e}\dfrac{1}{k^2}$, donde $k = 1, 2, \ldots$ El tamaño de la mancha queda determinado por las velocidades iniciales de los electrones.



Respuesta al problema 10.1.13.



Respuesta al problema 10.1.21*.

10.1.20. $v_{\text{máx}} = \dfrac{mg}{qB}\cos\alpha\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu} - 1\right)$ para $\mu \leqslant \operatorname{tg}\alpha$; $v = 0$ para $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha$.

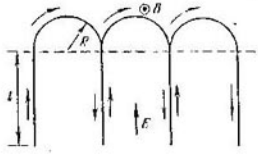
10.1.21*. a) El tiempo de movimiento del electrón a través de la sección destacada en la figura $t = \Delta l/v$, donde v es la proyección de la velocidad sobre el plano que pasa a través del electrón y del eje del campo magnético; el impulso obtenido en dirección perpendicular a dicho plano, $\Delta p_\perp = eB_\perp v_\perp \Delta l/v_\perp = eB_\perp \Delta l = e\Delta\Phi/2\pi R$, donde $\Delta\Phi$ es el flujo magnético a través de la sección destacada en la figura. La variación del momento de impulso

$$\Delta M = R\,\Delta p_\perp = \frac{e}{2\pi}\Delta\Phi, \quad \text{o bien} \quad M_1 - M_2 = \frac{e}{2\pi}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

b) $r = R\sqrt{B_2/B_1}$.

§ 10.2. Movimiento a la deriva de las partículas

10.2.1.* $v_{der} = 2v\,(B_1 - B_2)/\pi\,(B_1 + B_2)$.
10.2.2*. $v_{der} \approx \alpha m_e v^2/eB_0$.



Respuesta al problema 10.2.3.

10.2.3. Véase la figura. $R = \dfrac{l}{B}\sqrt{\dfrac{2mEl}{q}}$. $v_{der} = \dfrac{2\sqrt{2ql}\,E}{2\sqrt{2ql}\,B + \pi\sqrt{mE}}$.
10.2.4. $v = E/B$.
10.2.5. $v_{der} = E/B$.
10.2.6. $v_{der} = \dfrac{E}{B}\operatorname{sen}\alpha$.
10.2.8. $v \leqslant eBh/4m_e$ o $v = U/hB$.
10.2.9. $U = eB^2h^2/2m_e$, $U = 3{,}5 \cdot 10^5$ V.
10.2.10. En el sistema de coordenadas que se mueve a la velocidad de deriva E/B, el electrón describe una circunferencia de radio $m_e v'/eB$, donde $v' = \left(v^2 + 2v\dfrac{E}{B}\cos\alpha + \dfrac{E^2}{B^2}\right)^{1/2}$.
10.2.11. $v_{der} = F/qB$.
10.2.12. $v_e \approx 8 \cdot 10^{-7}$ m/s, $v_p \approx 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m/s.

Capítulo 11

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

§ 11.1. Movimiento de los conductores en un campo magnético permanente. Motores eléctricos

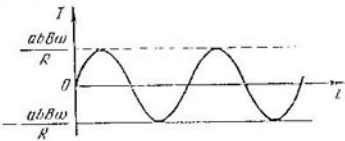
11.1.1. Entre los extremos de las alas.
11.1.2. $U = 0{,}03$ V.
11.1.4. $B = U/a^2\omega$.
11.1.5. $U = vBb$; $\sigma = \varepsilon_0 vB$.
11.1.6. $v > Ze/4\pi\varepsilon_0 Br^2$.
11.1.7. $B \approx 2 \cdot 10^5$ T.
11.1.8. $v(t) = g\dfrac{mR}{B^2l^2}$; en calor.
11.1.9. $Q = B^2vab/2\rho$, $a < b$; $Q = B^2vb^2/2\rho$, $a > b$.

11.1.10. a) Véase la figura. b) $M = \dfrac{a^2 b^2 B^2 \omega}{R} \operatorname{sen}^2 \omega t$.

11.1.11*. $Q = \dfrac{B^2 l^2 v \operatorname{tg} \alpha}{2\rho}$.

11.1.12. $N = \dfrac{(vBd)^2 l}{(R + \lambda d/S)^2}$.

11.1.13. $U = IB/\rho h$.



Respuesta al problema 11.1.10a.

11.1.14. a) $v = \sqrt{2BIlL/m}$; b) $v \approx 1{,}1 \cdot 10^7$ m/s

11.1.15. $v = \sqrt{IB/\rho b}$.

11.1.16*. $I = \dfrac{mg}{BR} \cos \omega t$.

11.1.17 $\omega_{est} = \dfrac{2\mathcal{E}}{Br^2} \left(1 - \dfrac{2FR}{B\mathcal{E}r}\right)$, $I = \dfrac{2F}{Br}$.

11.1.18*. $I = \omega B^2 r^2 / 2R = 0{,}4$ A.

11.1.19. $\omega_1 = \omega - 4M\rho/a^3 B^2$.

11.1.20. $I_b = 3{,}65$ A, $I_p = 1{,}58$ A.

11.1.21. En este caso en el circuito fluye la corriente máxima, ya que está ausente la fem de inducción.

11.1.22. $\mathcal{E} = 40$ V.

11.1.23. $n = n_1 \left(\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_1} - \dfrac{2\pi M R n_1}{\mathcal{E}_1^2}\right)$.

11.1.24. $\mathcal{E} = 120$ V.

11.1.25*. $x = \dfrac{2U(I_2 - I_1) + R(kI_1^2 - I_2^2)}{2\rho(I_2^2 - I_1^2)}$, $v = \dfrac{I_2}{2F}[2U - I_2(2\rho x + R)]$.

11.1.26*. $M = 2\mathcal{E}I_0\omega/\omega_0^2$.

11.1.27. $v = mgR/(B_0\pi a^2\alpha)^2$.

11.1.28. $k = I$.

11.1.29. $Q = SB/R$.

11.1.30*. $B = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ T.

§ 11.2. Campo eléctrico rotacional

11.2.1. $\Phi = 1$ Wb, 100 Wb, 300 Wb.

11.2.2. $E = \alpha R^2/2L = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ V/m

11.2.3. En la posición C la simetría axial del campo magnético no conlleva a que aparezca corriente en el puente de unión.

11.2.4. $E_1 = 6{,}4 \cdot 10^{-6}$ V/m, $E_2 = 2{,}56 \cdot 10^{-5}$ V/m

11.2.5. $E = \mu_0 \alpha x$, dónde x es la distancia desde el plano central.

11.2.6. $E = \dfrac{\mu_0 \pi \nu N I_0}{l} r \cos(2\pi\nu t)$, donde r es la distancia desde el eje de la bobina; $\mathcal{E}_0 = 0{,}12$ V.

11.2.7. a) $q = C\varphi$. b) $q_1 = q_2 = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\ \varphi$.

11.2.8. a) $q_1 = C_1 \dfrac{\varphi}{2}$, $q_2 = C_2 \dfrac{\varphi}{2}$; b)* $q_3 = \dfrac{C_3 (C_2 - C_1)}{C_1 + C_2 + C_3} \dfrac{\varphi}{2}$.

11.2.9. a) $I = 1{,}44$ mA; b) $I = 2{,}5$ mA, la corriente a través del puente de unión es nula; c) $I_1 \approx 2{,}73$ mA, $I_2 \approx 1{,}78$ mA, $I_3 \approx 0{,}95$ mA.

11.2.10*. $\mathcal{E} = \dfrac{\pi R^2}{3} n B_0 \omega \operatorname{sen} \omega t$.

11.2.11*. $\omega = qB_0 a^2 / 2mR^2$. No cambia.

11.2.12*. $B(t) = \alpha t\,(1 + r^2/a^2)$.

11.2.13*. Disminuye. Al crecer la inducción del campo magnético, aumentan la fuerza de Lorentz y la velocidad del electrón. Sin embargo, la última no crece con tanta rapidez como para que el electrón quede en la circunferencia del mismo radio.

11.2.14*. $R = 3r_0/4$. En 100 veces. Si el radio inicial $r < R$, el electrón se moverá por una espiral que converge hacia el centro, para $r > R$, por una espiral divergente.

11.2.15*. $\omega = 2\sigma B_0 / R\,(\rho + 2\mu_0 \sigma^2)$.

11.2.16*. a) En $m_{\text{em}}/m_e = 2{,}6 \cdot 10^{12}$ veces. b) $NSR \approx 7 \cdot 10^{-14}$ m^2, donde N es la cantidad de espiras por unidad de longitud del solenoide; R, el radio del solenoide y S, la sección del conductor.

11.2.17*. $a = FC/(mC + \varepsilon_0 \mu_0 q^2)$.

11.2.18*. $m_{\text{em}} \approx 10^{-27}$ kg.

§ 11.3. Inductancia mutua. Inductancia de los conductores. Transformadores

11.3.1. $\Phi = \mu_0 I S n \cos \alpha$, $L_{12} = \mu_0 S n \operatorname{sen} \alpha$.

11.3.2. $L_{12} = \dfrac{\mu_0 \pi R^2 n}{2} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)$.

11.3.3. $L_{12} = \mu_0 \pi r^2 n N$.

11.3.4. $U = \mu_0 \pi r^2 n N \omega I_0 \cos \omega t$.

11.3.5. $L = \mu_0 \pi R^2 n^2 l$.

11.3.6. $L = \mu_0 h b / a$.

11.3.7*. $L = \dfrac{|\mu| \mu_0}{2\pi} \ln \dfrac{b}{a}$.

11.3.8*. $L = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \left(\mu + 2\mu_2 \ln \dfrac{a}{b} \right)$.

11.3.9*. $L = \dfrac{\mu_0}{\pi} \ln \dfrac{h}{a}$.

11.3.10. a) $L = \mu_0 \pi\,(n_1^2 R_1^2 l_1 + n_2^2 R_2^2 l_2 + 2n_1 n_2 R_2^2 l_2)$; b) $L = \mu_0 \pi\,(n_1^2 R_1^2 l_1 + n_2^2 R_2^2 l_2 - 2n_1 n_2 R_2^2 l_2)$.

11.3.11. Aumentará k veces.

11.3.12. $t = B \sqrt{\varepsilon \mu} / U \sqrt{\mu_0} = 8{,}9 \cdot 10^{-2}$ s.

11.3.13. $L = L_1 + L_2 + 2L_{12}$, $L' = L_1 + L_2 - 2L_{12}$.

11.3.14*. $L = \sqrt{L_1 L_2}$.

11.3.15*. $\mathcal{E}_2 = \dfrac{|\mu| \mu_0 N_1 N_2 S}{l} I_0 \omega \cos \omega t$. $U_1 = \dfrac{|\mu| \mu_0 N_1^2 S}{l} I_0 \omega \cos \omega t$.

11.3.16. No.

11.3.20. $\nu = 100$ Hz.

11.3.21. Para disminuir las corrientes de Foucault.

11.3.23. $U = 10$ V.

11.3.24*. $U = 60$ V.
11.3.26*. $U = 190$ V.
11.3.27*. La ecuación de movimiento del electrón en el solenoide:

$$e\left(E - \frac{L}{l}\frac{dI}{dt}\right) = m_e\frac{dv}{dt}, \quad l = 2\pi RN$$

Pero $en_e vS = I$. Por eso la primera ecuación puede escribirse en la siguiente forma

$$El = U = \left(L + \frac{m_e l}{e^2 n_e S}\right)\frac{dI}{dt}.$$

Así, pues, la influencia de la masa del electrón sobre la inductancia del solenoide se reduce al aumento de la inductancia en $\Delta L = 2\pi m_e NR/e^2 n_e S$. Se puede.

§ 11.4. Circuitos eléctricos de corriente alterna

11.4.1. $I(t) = \mathscr{E}t/L$, $A = \mathscr{E}^2\tau^2/2L$. En energía del campo magnético.
11.4.2*. $I(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega L}(1 - \cos\omega t)$.
11.4.3. $C(t) = C_0(1 - t^2/2LC_0)$.
11.4.4. $U_{máx} = U_0 R\sqrt{C/L}$.
11.4.5. a) Al desconectarlo; b) $C = 1/(2\pi\nu n)^2 L \approx 1$ pF.
11.4.6. $I_{máx} = \mathscr{E}\sqrt{C/L}$, $q_{máx} = 2\mathscr{E}C$.
11.4.7. $I_{1\,máx} = U\sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1+L_2)}}$, $I_{2\,máx} = U\sqrt{\frac{CL_1}{L_2(L_1+L_2)}}$.
11.4.8. a) $I = U_0\sqrt{C/L}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$, donde $\omega_0 = 1/\sqrt{C/L}$; b) $I = \frac{\mathscr{E}_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \times$
$\times(\omega_0\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t - \omega\,\mathrm{sen}\,\omega t)$; $I_{máx} = \mathscr{E}_0/L(\omega_0 - \omega) \approx 4{,}8$ kA.
11.4.9*. $I(t) = I_0\exp\left\{-\frac{Rt}{2L}\right\}\left(\cos\omega_0 t + \frac{R}{2L\omega_0}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\right)$, donde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; $\tau = (L/R)\ln 2$.
11.4.10. $I(t) = \frac{\mathscr{E}_0(\omega^2 LC - 1)}{\omega L(2 - \omega^2 LC)}\cos\omega t$.
11.4.11. Para $1/LC = \omega^2$, $I = \mathscr{E}_0\sqrt{C/L}\cos\omega t$.
11.4.12. $L = 2{,}3$ H.
11.4.13*. $U_0 = V_0$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\omega CR}{(\omega CR)^2 - 1}$.
11.4.14. $\mathscr{E}_0 \approx 208$ V.
11.4.15. a) $I_L = 0$, $I_R = \frac{V_0}{R}\,\mathrm{sen}\,\omega t$, $N = 200$ W, b) $I_R = \frac{\mathscr{E}_0}{R} = \mathrm{sen}\,\omega t$, $I_C = -\mathscr{E}_0\omega C(\mathrm{sen}\,\omega t + \cos\omega t)$. $N = 200$ W.
11.4.16. $L = 0{,}16$ H.
11.4.17*. $L_1 I_1 + L_2 I_2 = L_1 I = (L_1 + L_2) I_0$, donde I_0 es la corriente estacionaria a través de las bobinas de inductancia L_1 y L_2

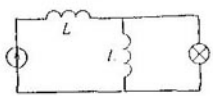
$$W = \frac{1}{2}L_1 I^2 = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) I_0^2 = \frac{L_1 L_2}{2(L_1 + L_2)} I^2$$

11.4.18. Véase la figura.

11.4.19*. Si V_{C_0} y V_C son la diferencia de potencial en los condensadores C_0 y C, respectivamente, e I, la corriente en el circuito, entonces $V_{C_0} - V_C = L\,dI/dt = V_0 \cos \omega t$, $\omega = 1/\sqrt{LCC_0/(C + C_0)}$. Pero $(V_0 - V_{C_0})\,C_0 = V_C C$. De estas ecuaciones hallamos

$$V_C = (1 + C/C_0)^{-1}\, V_0\,(1 - \cos \omega t).$$

Por eso para $V < 2V_0\,(1 + C/C_0)^{-1}$ la perforación tiene lugar pasado del tiempo



Respuesta al problema 11.4.18.

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arccos\left[1 - (1 + C/C_0)\,\frac{V}{V_0}\right],$$ en tanto que para $V > 2V_0\,(1 + C/C_0)^{-1}$ el condensador de capacidad C no se perfora.

11.4.20. b) Si I_1 e I_2 son las corrientes a través de las bobinas de inductancia L_1 y L_2, y $\omega = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)\,C}$ e $I_0 = V_0/\omega L_1$, entonces $L_1 I_1 + L_2 I_2 = LI_0$, $I_1 - I_2 = I_0 \cos \omega t$. De estas ecuaciones hallamos $I_2 = \dfrac{I_1}{L_1 + L_2}\,(1 + \cos \omega t)\,I_0$, $I_{\max} = 2V_0 \sqrt{\dfrac{C}{L_1 + L_2}}$.

11.4.21. a) $Q = L^2 I^2/Rt$. b) $Q = (\pi L I)^2/4Rt$.

11.4.22*. $\varphi = 2 \arcsin(\omega \sqrt{LC}/2)$; $v = \omega l/\varphi$ para $\omega < 2/\sqrt{LC}$. Para $\omega \ll 1/\sqrt{LC}$, $v = 1/\sqrt{LC}$.

§ 11.5. Conservación del flujo magnético. Superconductores en un campo magnético

11.5.2. $B = B_0\,(R/r)^2$.

11.5.3. Disminuirá a la mitad.

11.5.4. En vez y media.

11.5.5. $I' = I/3$.

11.5.6. $I(t) = I_0\left(1 + \dfrac{a}{l}\cos \omega t\right)$.

11.5.7. $\Delta I = \Phi_0/L$.

11.5.8. $I = I_0 - \dfrac{\pi a^2 B_0 \cos \alpha}{L}$.

11.5.9*. $I = Bla^2/L$; $B_0 = B\,(1 - \mu_0 \pi a/2L)$; véase la figura.

11.5.10*. Véase la figura. En ella x es la coordenada del extremo delantero de la barra, contando desde el origen de la bobina. a) $I_{\max} = I_0 S/(S - \sigma)$, $l > h$; b) $I_{\max} = I_0 S/(S - \sigma l/h)$, $l < h$.

11.5.11*. $L = \mu_0 \pi r^2 \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) \dfrac{N^2}{l}$.

11.5.12*. La interacción de un conductor largo con una superficie superconductora equivale a la interacción de dos conductores largos y paralelos con

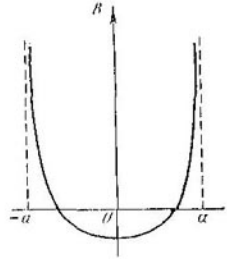
corrientes en sentidos opuestos, que permanecen a la distancia $2h$: $P_{mag} = -\mu_0 I^2/2\pi h^2$, $f = \mu_0 I^2/4\pi h$.

11.5.13*. $h = h_0 - mg/k$, $I = I_0\,(1 - mgl/kh_0)$.

11.5.14*. Cambiará solamente la componente axial de la inducción del campo magnético. En la zona del campo exterior ella es igual a $^1/_2 B_0 \cos\alpha$ y fuera, $-^1/_2 B_0 \cos\alpha$.

11.5.15*. Cuando la bobina se encuentra dentro del tubo, el campo se concentra en la zona de longitud l. Designemos la inducción dentro de la bobina como B_{in}, entre la bobina y el tubo, B_{ex}. El principio de conservación del flujo magnético a través de la sección del tubo y a través de la bobina nos da

$$B_{in}\sigma = B_{ex}\,(S - \sigma), \quad B_{in} = B_0 = \mu_0 IN/l.$$



Respuesta al problema 11.5.9*.

Partiendo del principio de conservación de la energía

$$\frac{B_{in}^2}{2\mu_0}\sigma l + \frac{B_{ex}^2}{2\mu_0}(S-\sigma)\,l = \frac{B_0^2}{2\mu_0}\sigma l + \frac{mv^2}{2}$$

obtenemos $v = NI\sigma\sqrt{\mu_0/m\,(S-\sigma)\,l}$.

11.5.16*. Cuando la barra superconductora entra en un campo, en él surge una corriente que crea el campo magnético, cuya inducción es, según el módulo, igual a la inducción del campo exterior y de sentido opuesto. El trabajo para crear la corriente $I = B^2Sl/2\mu_0$ es igual a su variación de la energía cinética de la barra. De aquí $v = \sqrt{B^2Sl/\mu_0 m}$.

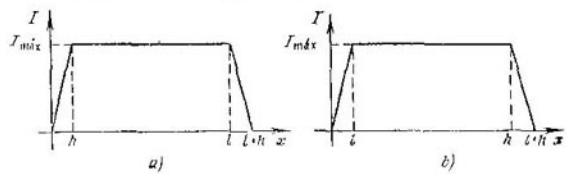
11.5.17*. $v = v_0\,(1 + \sqrt{1 + Lx_0 I_0^2/mv_0^2})$.

11.5.18*. $\omega = \sqrt{4\mu_0 ah i^2/m\,(l-d)}$.

11.5.19*. $T = T_0\,(1 + B_0^2 a^4 T_0^2/4LJ)^{-1/2}$.

11.5.20.*. El conductor oscilará con la frecuencia $\omega = Bl/\sqrt{mL}$.

11.5.21*. $B \approx 500$ T. $P \approx 10^{11}$ Pa.



Respuesta al problema 11.5.10*.

11.5.22*. La ecuación de movimiento del electrón en el tubo:

$$m_e \frac{dv}{dt} = eE = e\,\frac{R}{2}\,\frac{d\,(B - B_1)}{dt},$$

donde B y B_1 son las inducciones del campo magnético exterior y del campo creado por los electrones en movimiento. Por eso $m_e v = eR\,(B - B_1)/2$. Por otra

parte, $en_e vh = j$, $B_1 = \mu_0 j$, donde j es la densidad lineal de la corriente. De las últimas ecuaciones obtenemos

$$j = e^2 n_e h B/(2m_e + e^2 R \mu_0 n_e h),$$

y luego

$$B - B_1 = B 2m_e/(2m_e + e^2 R \mu_0 n_e h).$$

En nuestro caso $B = B_0$. Por lo tanto,

$$B_0 - B_1 = \Delta B = B_0 2m_e/(2m_e + e^2 R \mu_0 n_e h).$$

11.5.23*. $B = 2m_e\omega/e$.

§ 11.6. Enlace entre el campo eléctrico alterno y el magnético

11.6.1. $C_B = \frac{1}{c}\frac{dN}{dt}$ (en CGS); $C_B = \mu_0\varepsilon_0\frac{dN}{dt}$ (en SI). C_B es la circulación de la inducción del campo magnético; N, el flujo de intensidad del campo eléctrico; c, la velocidad de la luz, ε_0 y μ_0, las constantes dieléctrica y magnética.

11.6.2. a) $\frac{dN}{dt} = vlE$; $C_B = \mu_0\varepsilon_0 vlE$. $C_B = \mu_0\varepsilon_0\frac{dN}{dt}$ (en SI); $C_B = \frac{1}{c}\frac{dN}{dt}$ (en CGS).

11.6.3. $N = 9\cdot10^5$ V·m.

11.6.4*. Según la ley de Gauss, el flujo de intensidad para el campo eléctrico dentro del condensador $N = Q/\varepsilon_0$, donde Q es la carga del condensador, y la velocidad de la variación del flujo $\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} I$, donde I es la corriente en el circuito. Por eso la circulación de la inducción para el campo magnético $C_B = \mu_0\varepsilon_0(dN/dt) = \mu_0 I$ coincide con la circulación de la inducción para el campo magnético que crearía la corriente I.

11.6.5. $B = 2{,}5\cdot10^{-6}$ T. Véase la figura.

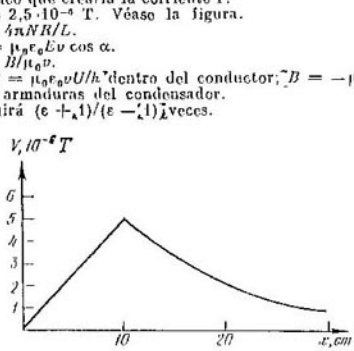
11.6.6. $n = 4\pi NR/L$.

11.6.7. $B = \mu_0\varepsilon_0 Ev\cos\alpha$.

11.6.8. $\sigma = B/\mu_0 v$.

11.6.9. a) $B = \mu_0\varepsilon_0 vU/h$ dentro del conductor; $B = -\mu_0\varepsilon_0 vU/h$ entre el conductor y las armaduras del condensador.

b*) Disminuirá $(\varepsilon + 1)/(\varepsilon - 1)$ veces.

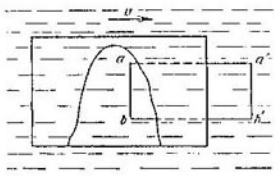


Respuesta al problema 11.6.5.

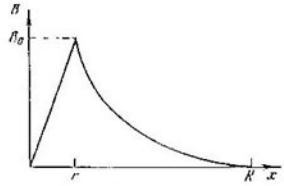
11.6.10*. Véase la figura. En el primer caso, debido a la corriente de polarización que circula a través del contorno $abb'a'$, la circulación del vector de inducción para el campo magnético a través de dicho contorno será ε veces

mayor que en el segundo caso. Por eso el movimiento del medio junto con el contorno disminuye ε veces la inducción del campo magnético.

11.6.11*. a) La inducción, originada por el campo eléctrico alterno, $B_1 = \pi r^2 \mu_0 \varepsilon_0 / 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \alpha r/2$. La inducción, originada por la corriente de pola-



Respuesta al problema 11.6.10*.



Respuesta al problema 11.6.12.

rización del dieléctrico es $\varepsilon - 1$ veces mayor: $B_2 = (\varepsilon - 1) B_1$. Por esta razón, $B = B_1 + B_2 = \varepsilon B_1 = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \alpha r/2$.

b) $B_1 = \dfrac{\mu_0 \varepsilon_0 \alpha l r}{2h}$, $\quad B_2 = \dfrac{\mu_0 r_0 \alpha l l}{2hR} [r^2 (\varepsilon - 1) + R^2]$.

11.6.12. Véase la figura. $B_0 = \mu_0 l r / 2\pi R^2$.

Capítulo 12

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 12.1. Propiedades, emisión y reflexión de las ondas electromagnéticas

12.1.1. En dirección del eje z.

12.1.2. a) Cambiará en contraria; b) no cambiará.

12.1.3. $E = E_0 \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{\lambda} (z - ct)$.

12.1.4. $E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$;

$$\varphi = \omega (t - z/c) + \operatorname{arctg} \frac{E_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + E_2 \operatorname{sen} \varphi_2}{E_1 \cos \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_2}.$$

12.1.5. $E = 2E_0$; $\overline{w} = \dfrac{1}{2\pi} E_0^2 \cos^2 \left[\left(t - \dfrac{z}{c} \right) \Delta + \varphi \right]$.

12.1.6. a) $B = \dfrac{1}{c} E$ (en SI); $B = E$ (en CGS). b*) $B_0 = \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{c} E_0$.

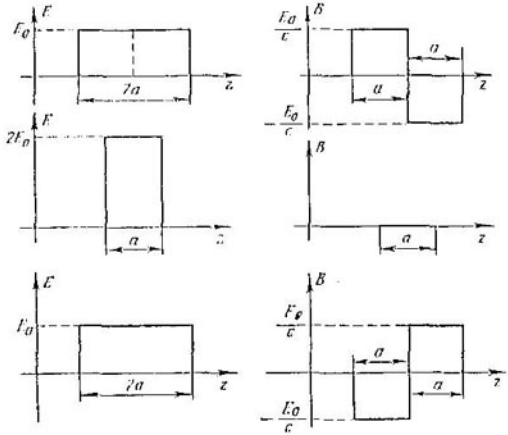
12.1.7. a) Véase la figura. $\dfrac{1}{2}$, 1; $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$; 0, $\dfrac{1}{2}$.

b) Dos ondas planas que se mueven en sentidos opuestos. La extensión de las ondas es d y la intensidad del campo eléctrico, $E/2$.

c) En dos ondas planas que se propagan perpendicularmente a los planos AB y $A'B'$ en sentidos opuestos. La inducción del campo eléctrico en las ondas es $cB/2$.

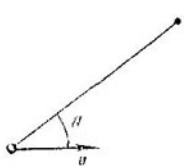
12.1.8. a) $E_{rad} = \pm \frac{1}{2} \frac{v}{c} E$.

b*) Al pararse la carga Q, toda la energía del campo magnético se convierte en energía de radiación. En cualquier punto la inducción del campo magnético

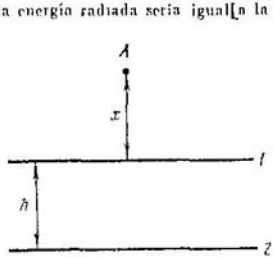


Respuesta al problema 12.1.7a.

de la carga en movimiento es igual en CGS a la intensidad del campo eléctrico, multiplicada por $\frac{v}{c}$ sen 0. Por eso la energía radiada sería igual a la energía



Respuesta al problema 12.1.8*b.



Respuesta al problema 12.1.9*a.

del campo eléctrico $Q^2/2R$, multiplicada por $(v/c)^2$, si no existiese el factor sen 0. A causa de este factor, la energía del campo magnético disminuye 1,5 veces más.

De esta manera,

$$W=\frac{Q^2}{2R}\left(\frac{v}{c}\right)^2\frac{2}{3}=\frac{Q^2}{2R}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \text{ (en CGS)},$$

$$W=\frac{Q^2}{12\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \text{ (en SI)}.$$

c) La intensidad de los campos «sobrantes» aumenta al doble. La energía radiada es proporcional al cuadrado de la intensidad. Por eso la potencia de radiación crece 4 veces.

12.1.9*. a) Véase la figura. En el instante t en el punto A la intensidad del campo eléctrico de radiación $E_{rad}=E_1+E_2$, donde E_1 y E_2 son las intensidades de las radiaciones que generan las placas inferior y superior:

$$E_1=\frac{1}{2c}Ev_{t-x/c}=\frac{1}{2c}Ea\,(t-x/c),$$

$$E_2=-\frac{1}{2c}Ev_{t-\frac{x+h}{c}}=-\frac{1}{2c}Ea\left(t-\frac{x+h}{c}\right).$$

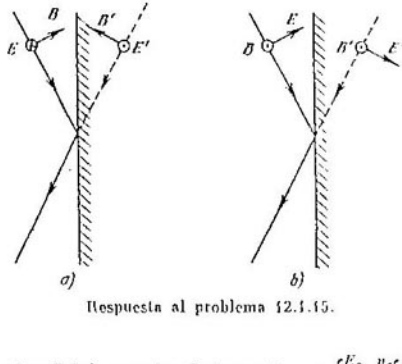
Esto significa que $E_{rad}=ahE/2c$.

b) Debido a la interferencia de la radiación de las diferentes placas,

$$\nu_k'=\frac{c}{d}k,\quad \nu_k''\approx\frac{c}{d}\left(k+\frac{1}{2}\right),\ \text{donde } k \text{ es un número entero.}$$

c) $E_{rad}=\mu_0 c i_0/2=i_0/2c\varepsilon_0$.

d) En el campo eléctrico las ondas E_0 sen ωt ($\omega=2\pi\nu$) la velocidad de los electrones $v=(eE_0/m_e\omega)\cos\omega t$. La amplitud de la intensidad del campo eléc-

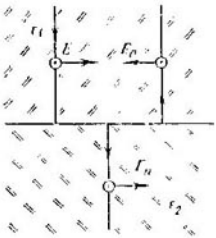


Respuesta al problema 12.1.15.

trico en la onda reflejada por estos electrones, $E_{rad}=\frac{eE_0}{m_e\omega}\frac{n_e e}{2c\varepsilon_0}$. El factor de reflexión $k=(E_{rad}/E_0)^2=(n_e e^2\lambda/4\pi m_e v\varepsilon_0 c)^2$.

También puede hallarse el factor de reflexión determinando en cuánto se debilita la onda después de pasar la película. En este caso es necesario tener en

cuenta la radiación secundaria de los electrones, originada por la interacción con la onda ya emitida por estos mismos electrones, debido a la interacción con la onda incidente. Como consecuencia de la superposición de la onda que pasó la película y la radiación secundaria, que va en oposición de fase, la intensidad de la onda disminuye, mientras que debido a la superposición de ella y la radiación primaria, que va con un desfasaje de $\pi/2$, aumenta. La primera influencia supera dos veces la segunda. Por esta razón, la intensidad de la onda, al pasar la película, disminuirá en la magnitud igual a la intensidad de la onda reflejada.



Respuesta al problema 12.1.22.

12.1.10. $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ cm.

12.1.11. A medida que aumenta el grosor de la película, en la reflexión de la radiación comienza a participar una cantidad cada vez mayor de electrones, y la amplitud de la onda reflejada crece linealmente (la zona $x < x_1$). La dependencia lineal entre la amplitud y el grosor de la película se infringe cuando la parte de la radiación reflejada es grande. Eso tiene lugar cuando $x > x_2$.

12.1.12. a) $\Lambda \approx 4\pi m_e v v_0 c/n_e e^2$. b) $\Delta \approx 10^{-6}$ cm.

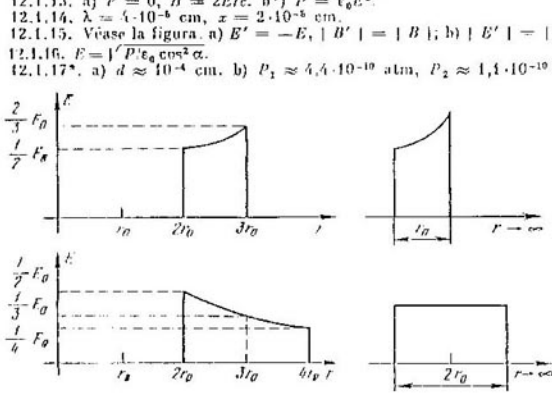
12.1.13. a) $F = 0$, $B = 2E/c$. b*) $P = \varepsilon_0 E^2$.

12.1.14. $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ cm, $x = 2 \cdot 10^{-5}$ cm.

12.1.15. Véase la figura. a) $E' = -E$, $|B'| = |B|$; b) $|E'| = |E|$.

12.1.16. $E = \sqrt{P/\varepsilon_0 \cos^2 \alpha}$.

12.1.17*. a) $d \approx 10^{-4}$ cm. b) $P_1 \approx 4{,}4 \cdot 10^{-10}$ atm, $P_2 \approx 1{,}1 \cdot 10^{-10}$ atm.



Respuesta al problema 12.1.23b.

12.1.18*. La fuerza que actúa sobre el electrón a lo largo de la superficie metálica es igual en CGS $F = e\left(E - \frac{v}{c}B\right) = 0$. Por eso, $E/B = v/c$.

12.1.19*. $P_* = \frac{1}{2\pi} E_0^2 \frac{c+v}{c-v}$.

12.1.20. $v = \Delta c/(2\nu_0 + \Delta)$.

12.1.21. a) Las cargas inducidas en la superficie de separación plana crean una intensidad del campo eléctrico, perpendicular a la superficie de separación plana. Por esta razón, solamente la componente perpendicular de la intensidad del campo eléctrico disminuye ε veces.

b) Las corrientes superficiales inducidas crean una inducción del campo magnético, paralela a la superficie. Por esto, solamente la componente paralela de la inducción del campo magnético aumenta μ veces.

12.1.22. Por ambos lados de la superficie de separación la intensidad del campo eléctrico y la inducción del campo magnético son iguales: $E - E_0 = E_n$, $B + B_0 = B_n$, y $B = E\sqrt{\varepsilon_1}/c$, $B_0 = E_0\sqrt{\varepsilon_1}/c$, $B_n = E_n\sqrt{\varepsilon_2}/c$. De estas ecuaciones se desprende que $E_0/E = (\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1})/(\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1})$. Para $\sqrt{\varepsilon_1} < \sqrt{\varepsilon_2}$ los signos de E_0 y E son los mismos y para $\sqrt{\varepsilon_1} > \sqrt{\varepsilon_2}$ son opuestos. Eso significa que en el primer caso la fase de la onda reflejada no varía, mientras que en el segundo caso cambia en π.

12.1.23. b) Véase la figura. $W_1 = \frac{7}{3} E_0^2 r_0^3$, $W_2 = 2E_0^2 r_0^3$.

§ 12.2. Propagación de las ondas electromagnéticas

12.2.2. La longitud de la onda y la velocidad de la onda disminuyen n veces, la frecuencia no cambia.

12.2.4. $\operatorname{sen} \alpha_k = k\lambda/b$, donde k es un número entero.

12.2.5. En k^2 veces.

12.2.6. $\Delta\alpha = 13{,}5'$.

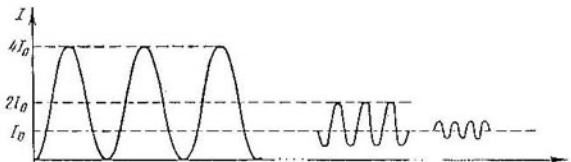
12.2.7. $l = 2r^2/\lambda$.

12.2.8. Aumenta la intensidad de radiación en otros puntos.

12.2.9*. En 4 veces.

12.2.10. Véase la figura.

12.2.11*. a) En 100 veces. b) En 324 veces.



Respuesta al problema 12.2.10.

12.2.12*. $c_1 = \frac{i}{\lambda}$, $a = \frac{A\Delta S}{r\lambda} i$ (la multiplicación por i significa el desfasaje de la onda secundaria en $\pi/2$).

12.2.13. a) $R \approx 1$ km. b) $R \approx 1{,}5$ m.

12.2.14. ~1 m; ~0,5 km; ~150 km.

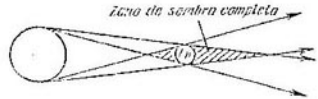
12.2.15. a) La parte azul del espectro se disipa con más intensidad en la superficie opaca. b) A causa del «contorneo» difraccional de las gotas de niebla mediante la luz roja. c) A causa de la fluctuación de la densidad del aire atmosférico la parte azul del espectro se disipa con más intensidad.

Capítulo 13.

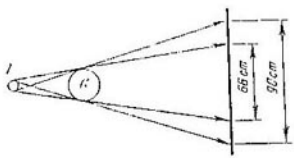
ÓPTICA GEOMÉTRICA

§ 13.1. Propagación rectilínea y reflexión de la luz

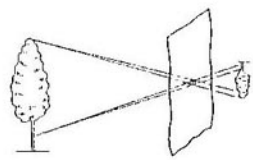
13.1.1. Véase la figura.
13.1.2. Véase la figura. $d_1 = 60$ cm, $d_2 = 90$ cm.



Respuesta al problema 13.1.1.

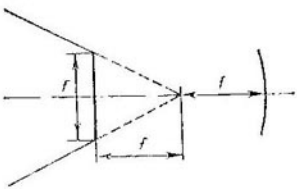


Respuesta al problema 13.1.2.

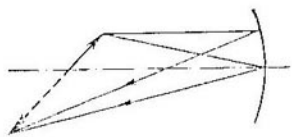


Respuesta al problema 13.1.3.

13.1.3. Véase la figura.
13.1.4. En la pared aparece la imagen del Sol. En el caso en que la dimensión del orificio resulte ser mayor que la imagen del Sol en la pared.
13.1.5. El espejo no da vueltas a la imagen. Pero un objeto no transparente nos parece estar vuelto de derecha a izquierda, ya que la parte reflejada por el espejo puede verse sólo si desenvolvemos el objeto en 180°.



Respuesta al problema 13.1.11.



Respuesta al problema 13.1.12

13.1.6. Como consecuencia de la reflexión doble, la imagen que se recibe de los espejos da la vuelta.
13.1.7. $f = R/2$.
13.1.8. $t = 20$ cm.
13.1.9. $f = 36$ cm.

13.1.10. $f = 60$ cm.
13.1.11. Véase la figura.
13.1.12. Véase la figura.
13.1.14*. Un paraboloide de rotación, si su eje es paralelo a los rayos.
13.1.15. a) $v = 2\omega R$; b*) $v = 4\omega R$.
13.1.16*. $\alpha = 120°$.

§ 13.2. Refracción de la luz. Lentes ópticas

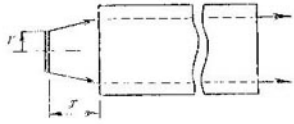
13.2.1. $\alpha = 48°$.
13.2.2*. a) $h = 2{,}66$ m. b) No.
13.2.3. Se desplazará en $2h\,(1 - 1/n)$ en dirección del plano del espejo.

13.2.4. $\Delta = (d+h)\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{d \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{n_0^2 - \operatorname{sen}^2\alpha}} - \dfrac{h \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2\alpha}}$.

13.2.5. $n = 1{,}13$.
13.2.6. a) $\alpha_d = 25°$, $\alpha_a = 49°$, $\alpha_{da} = 34°$. b) A causa de la reflexión interna total de los rayos en las burbujas.
13.2.7. a) No. b) No.
13.2.8. $\operatorname{sen}\alpha = n/k^{N-1}$.
13.2.9. c*) $f = (n-1)\,R_1R_2/(R_1 + R_2)$.
13.2.10. a) $f = 0{,}25$ m. b) $R = 0{,}6$ m.
13.2.11. $R = 0{,}35$ m.
13.2.12. $\Delta = \alpha\,(n_1 - n_2)\,f$.
13.2.13*. De la parte de la superficie lateral del semicilindro limitada por el ángulo $\alpha = 2 \operatorname{arc\,sen}(1/n)$.
13.2.14*. $n = 4/3$.
13.2.15. $n = 3/2$.
13.2.16. $y = x/n$.
13.2.17*. $r' = r/n$.
13.2.18*. $n = R/(R - l)$.

13.2.19*. $H = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n_0}{\alpha} - R\right)$.

13.2.20. $r = R/2$.
13.2.21. Siendo $\alpha > \operatorname{arc\,cos}(2/3)$ la luz ya al reflejarse la primera vez sale parcialmente del cono. Siendo $\alpha < \operatorname{arc\,cos}(2/3)$ primero transcurre la reflexion interna total de la superficie lateral. Luego, al cabo de varias reflexiones, el ángulo de incidencia aumenta y la luz se reflejará de la superficie lateral sólo parcialmente.

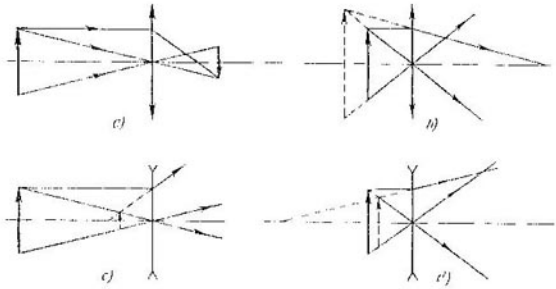


Respuesta al problema 13.2.22

13.2.22. Véase la figura. $R = r + x\sqrt{(n^2-1)/(2-n^2)}$, si $n < \sqrt{2}$. No hay imagen, si $n > \sqrt{2}$.

§ 13.3. Sistemas ópticos

13.3.1. Véase la figura. a) $k = 1/2$; b) $k = 3/2$; c) $k = 1/4$; d) $k = 3/4$.
13.3.2. $f = 20$ cm.



Respuesta al problema 13.3.1.

13.3.3. a) $f_1 = -5$ dioptrías, $f_2 = +2$ dioptrías. b) Una persona muy miope.
13.3.4. $l = 2f$
13.3.5. $f = 3/7$ m
13.3.6. $t = 5$ ms.
13.3.7. $h = (D - d)/3$.

13.3.8. $L = \dfrac{r_1 - r_2}{r_2 + D/2}\, f$.

13.3.9. $k = \dfrac{f^2}{(a-f)^2 - l^2/4}$; $k \approx \left(\dfrac{f}{a-f}\right)^2$ para $l \to 0$.

13.3.10*. $\operatorname{tg} \alpha' \approx (1 - a/f) \operatorname{tg} \alpha$

13.3.11. a) $l = f\dfrac{a-2f}{a-f}$; (b) $f' = \dfrac{1}{2} f$.

13.3.12. $f' = \dfrac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$; $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}$; $f' = \dfrac{f_1 f_2}{f_1 - f_2}$.

13.3.13. $f_1 = f\dfrac{n_0 - 1}{2n_0 - n}$; $f_2 = f\dfrac{n_0 - 1}{n_0 - n}$.

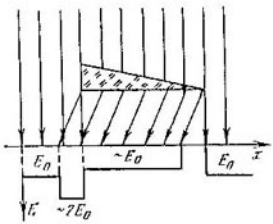
Respuesta al problema 13.3.14.

13.3.14. Véase la figura.
13.3.15. $f = \dfrac{l^2 - 2f_1 f_2}{2(l - f_1 - f_2)}$.

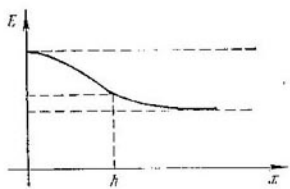
13.3.16. A distancias mayores de 20 cm de la lente más próxima.
13.3.17. $f > 0{,}3$ m.
13.3.18. $L = l'\sqrt{(l+2f)^2 + a^2}$.
13.3.19. $l = f + a + f/\cos\alpha$.

§ 13.4. Fotometría

13.4.1. $h = 1$ m, $B = 20$ W.
13.4.2. En 9 veces.
13.4.3. $I_1 = 130$ lx, $I_2 = 71$ lx, $I_3 = 25$ lx.
13.4.4. $I = 42$ lx.
13.4.5*. Las indicaciones del fotodetector en el primer caso disminuyen a causa de la reflexión de la luz en la lámina. En el segundo caso un efecto más fuerte resulta ser el desplazamiento de la imagen de la bombilla hacia el fotodetector, el que precisamente conduce al aumento del flujo luminoso en el fotodetector.
13.4.6*. $n = (2\sqrt[3]{2R^2r}/d)^2$, si $d \gg 2\sqrt[3]{2R^2r}$; $n = 1$, si $d \ll 2\sqrt[3]{2R^2r}$.
13.4.7. Cerca de 1 m.
13.4.8*. No. $I \approx I_0 S/\pi R^2$.
13.4.9. Véase la figura.
13.4.10. Disminuye el brillo y aumenta la precisión de la imagen.
13.4.11*. Aumentando en 1/10 el diámetro.



Respuesta al problema 13.4.9.



Respuesta al problema 13.4.14.

13.4.12. El brillo de la imagen disminuye en la parte superior de la flecha, un poco más de dos veces, y en la parte inferior, un poco menos que dos veces.
13.4.13. No cambiará.
13.4.14. Véase la figura.
13.4.15. En 80 000 veces.
13.4.16. $n = hR^2/4\,(l^2 + h^2)^{3/2}$.
13.4.17. $I' = \dfrac{1-k}{1+k}\,I$.
13.4.18*. En 25 veces.
13.4.19. $L = L_0 D/D_0$.
13.4.20. Aumenta 2 veces.
13.4.21. Aumenta bruscamente el flujo luminoso de la energía que viene de la estrella hacia el ojo.
13.4.22*. $n \approx (10\pi r^2 L)^{-1}$.
13.4.23*. $m = 0{,}2$ g.
13.4.24. En 8 veces.

§ 13.5. Naturaleza cuántica de la luz

13.5.1. Con una precisión de $\pm 8°$.

13.5.2. $I = 4$ m.

13.5.3. $I = 4 \cdot 10^{-7}$ W/m², $I = 4 \cdot 10^{-6}$ W/m², $I = 4 \cdot 10^{-5}$ W/m².

13.5.4. $W = h\nu - eU_0$.

13.5.5. Si las velocidades del electrón y positrón son iguales según el módulo y con direcciones contrarias, $\nu = 1{,}24 \cdot 10^{20}$ Hz

13.5.6. a) $v = c\,\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$; b) $v = c\,\dfrac{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)}{\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2}$.

13.5.7. a) $m = (1 - \cos\theta)\,\dfrac{h\nu^2}{c^2 \Delta\nu}$; b) $\Delta\nu = (1 - \cos\theta)\,\dfrac{h\nu}{m_e c^2}$.

13.5.8*. Al emitir un fotón en dirección del movimiento del átomo

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v - \Delta v)^2}{2} + h\nu + \varepsilon,$$

$$mv = m(v - \Delta v) + h\nu/c. \qquad (1)$$

Al emitir el fotón en dirección contraria al movimiento del átomo

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v - \Delta' v)^2}{2} + h\nu' + \varepsilon,$$

$$mv = m(v + \Delta' v) - h\nu'/c. \qquad (2)$$

En (1) y (2) m es la masa del átomo; Δv y $\Delta' v$, las variaciones de la velocidad; ε, la variación de la energía interna del átomo; ν' es la frecuencia buscada del fotón. Para Δv, $\Delta' v \ll v$ de (1) y (2) se desprende $\nu' = \nu\,\dfrac{1 - v/c}{1 + v/c}$.

b) $\nu' = \nu\,(1 - v/c)$.

13.5.9. Por la atracción del fotón hacia la estrella.

13.5.10. $\Delta\nu = \gamma\nu M/Rc^2$, γ es la constante de gravitación. $\Delta\nu_S \approx 10^3$ Hz. El movimiento térmico de los átomos en la superficie del Sol influye sobre la frecuencia de los fotones a radiar más que el campo de gravedad.

13.5.11. $R < \gamma M/c^2$; $R_S \approx 1{,}5$ km.

13.5.12*. $l = (Rc)^2/6\gamma M$; $l \approx 5 \cdot 10^9$ años luz; $x \approx 10^{10}$ años luz.

I. Unidades y dimensiones de las magnitudes físicas en SI y sus relaciones con las unidades CGS

Magnitud		Unidad			
Denominación	Designación *)	Dimensión **)	Denominación	Designación	Contiene unidades CGS
Unidades principales					
Longitud	l	m	metro	m	10^2 cm
Masa	m	kg	kilogramo	kg	10^3 g
Tiempo	t	s	segundo	s	1
Intensidad eléctrica	I	A	Amperio	A	$3 \cdot 10^9$ CGS
Temperatura termodinámica	T	K	Kelvin	K	1
Cantidad de substancia	ν	mol	mol	mol	1
Intensidad luminosa	J	cd (lm/sr)	candela	cd	1
		Unidades complementarias			
Ángulo plano	α	—	radián	rad	1
Ángulo sólido	ω	—	estereorradián	sr	1
Unidades derivadas		*Espacio y tiempo*			
Área	$S = lb$	m^2	metro cuadrado	m^2	10^4 cm^2
Volumen	$V = lbh$	m^3	metro cúbico	m^3	10^6 cm^3
Velocidad	$v = s/t$	m s^{-1}	metro por segundo	m/s	10^2 cm/s
Aceleración	$a = v/t$	m s^{-2}	metro por segundo elevado al cuadrado	m/s^2	10^2 cm/s^2
Velocidad angular	$\omega = \alpha/t$	s^{-1}	radián por segundo	rad/s	1
Aceleración angular	$\varepsilon = \omega/t$	s^{-2}	radián por segundo elevado al cuadrado	rad/s^2	1
Frecuencia de rotación	$n = 1/T$	s^{-1}	segundo en el grado menos uno	s^{-1}	1

Continuación

Magnitud		Unidad			
Denominación	Designación*)	Dimensión**)	Denominación	Designación	Contiene unidades CGS
Frecuencia (del proceso periódico)	$\nu = 1/T$	s^{-1}	hertz	Hz	1
		Magnitudes mecánicas			
Densidad	$\rho = m/V$	$m^{-3} \cdot kg$	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	10^{-3} g/cm³
Fuerza	$F = ma$	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$	Newton	N	10^5 dyn
Presión;	$p = F/S$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$ (N/m²)	pascal	Pa	10 dyn/cm²
tensión (mecánica)	$\sigma = F/S$				
Momento de la fuerza	$M = Fr$	$m^2 \cdot kg \cdot s^2$	Newton-metro	N·m	10^7 dyn cm
Impulso de la fuerza	$I = Ft$	$m \cdot kg \cdot s^{-1}$	Newton-segundo	N·s	10^5 dyn·s
Impulso (cantidad de movimiento)	$p = mv$	$m \cdot kg \cdot s^{-1}$	kilogramo-metro por segundo	kg·m/s	10^5 g·cm/s
Momento del impulso (momento de cantidad de movimiento)	$L = mvr = pr$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$	kilogramo-metro elevado al cuadrado por segundo	$kg \cdot m^2/s$	10^7 g·cm²/s
Momento de inercia	$I = mr^2$	$m^2 \cdot kg$	kilogramo-metro cuadrado	$kg \cdot m^2$	10^7 g·cm²
Trabajo;	$A = Fs$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$ (N·m)	Joule	J	10^7 ergios
energía potencial;	$U = mgh$				
energía cinética	$K = mv^2/2$				
Potencia	$N = A/t$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$ (J/s)	vatio	W	10^7 ergio/s
Rigidez;	$k = F/\Delta l$	$kg \cdot s^{-2}$	Newton por metro	N/m	10^3 dyn/s
tensión superficial	$\sigma = F/l$				
Viscocidad (dinámica)	$\mu = F\Delta l/Sv$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$	Pascal-segundo	Pa·s	10 P
		Magnitudes acústicas			
Presión sonora	$p = F/S$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$ (N/m²)	Pascal	Pa	10 dyn/cm²
Energía sonora	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	Joule	J	10^7 ergios

Potencia sonora (flujo de energía sonora)	$P = W/t$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$ (J/s)	vatio	W	10^7 ergio/s
Intensidad del sonido (densidad del flujo de energía sonora)	$I = P/S$	$kg \cdot s^{-3}$	vatio por metro cuadrado	W/m^2	10^3 ergio/(s·cm²)

Magnitudes térmicas

Cantidad de calor; energía interna	$Q = A$ U	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	Joule	J	10^7 ergios
Calor específico de combustión;	$q = Q/m$	$m^2 \cdot s^{-2}$	Joule por kilogramo	J/kg	10^4 ergio/g
de vaporización;	$r = Q/m$				
de fusión	$\lambda = Q/m$				
Capacidad calorífica	$C = Q/\Delta T$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$	Joule por kelvin	J/K	10^7 ergio/K
Calor específico	$c = C/m$	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$	Joule por kilogramo-kelvin	J/(kg·K)	10^4 ergio/(g·K)
Flujo térmico	$\Phi = Q/t$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	vatio	W	10^7 ergio/s
Densidad del flujo térmico	$I = \Phi/S$	$kg \cdot s^{-3}$	vatio por metro cuadrado	W/m^2	10^3 ergio/(s·cm²)
Conductibilidad térmica	$\lambda = It/T$	$m \cdot kg \cdot s^{-3} K^{-1}$	vatio por metro-kelvin	W/(m·K)	10^5 ergio/(s·cm·K)
Coeficiente de difusión	D	$m^2 \cdot s^{-1}$	metro cuadrado por segundo	m^2/s	10^4 cm²/s
Coeficiente de temperatura;					
de presión	$\beta = \Delta p/p_0 \Delta T$	K^{-1}	kelvin elevado a la potencia menos uno	K^{-1}	1
de dilatación lineal	$\alpha = \Delta l/l_0 \Delta T$				
de dilatación volumétrica	$\beta = \Delta V/V_0 \Delta T$				

Magnitudes expresadas mediante la cantidad de substancia

Masa molar	$M = m/\nu$	$kg \cdot mol^{-1}$	kilogramo por mol	kg/mol	10^{3} g/mol
Volumen molar	$V_m = V/\nu$	$m^3 \cdot mol^{-1}$	metro cúbico por mol	m^3/mol	10^6 cm³/mol
Energía interna molar	$U_m = U/\nu$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$ mol^{-1}	Joule por mol	J/mol	10^7 ergio/mol

Continuación

Magnitud		Unidad			
Denominación	Designación *)	Dimensión **)	Denominación	Designación	Contiene unidades CGS
Capacidad calorífica molar	$C_m = C/\nu$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot k^{-1} \cdot mol^{-1}$	Joule por molkelvin	J/(mol k)	10^7 ergio/(mol·k)
		Magnitudes magnéticas y eléctricas			
Cantidad de electricidad; carga eléctrica	$Q = It$	s·A	coulomb	C	$3 \cdot 10^9$ CGS
Flujo de desplazamiento eléctrico	Ψ				
Densidad superficial de la carga eléctrica	$\sigma = Q/S$	$m^{-2} \cdot s \cdot A$	coulomb por metro cuadrado	C/m²	$3 \cdot 10^5$ CGS
Desplazamiento eléctrico	D				
Densidad volumétrica de la carga eléctrica	$\rho = Q/V$	$m^{-3} \cdot s \cdot A$	coulomb por metro cúbico	C/m³	$3 \cdot 10^3$ CGS
Densidad de corriente eléctrica	$i = I/S$	$m^{-2} \cdot A$	amperio por metro cuadrado	A/m²	$3 \cdot 10^5$ CGS
Tensión eléctrica; potencial eléctrico; diferencia de potencial eléctrico; fuerza electromotriz	U $V = A/Q$ $U = V_1 - V_2$ $\mathcal{E}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ (W/A)	voltio	V	$3{,}34 \cdot 10^{-3}$ CGS
Intensidad de campo eléctrico	$E = U/l$	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	voltio por metro	V/m	$3{,}34 \cdot 10^{-5}$ CGS
Capacidad eléctrica	$C = Q/U$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$ (C/V)	faradio	F	$8{,}99 \cdot 10^{11}$ CGS (cm)
Permitividad absoluta	$\varepsilon = D/E$	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$	faradio por metro	F/m	$1{,}13 \cdot 10^{11}$ CGS
Resistencia eléctrica	$R = U/I$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$ (V/A)	ohmio	ohmio	$1{,}11 \cdot 10^{-12}$ CGS
Resistividad eléctrica	$\varrho = RS/l$	$m^3 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	ohmio-metro	ohmio·m	$1{,}11 \cdot 10^{-10}$ CGS
Conductibilidad eléctrica	$G = 1/R$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$ (A/V)	siemens	S	$8{,}99 \cdot 10^{11}$ CGS
Conductividad eléctrica	$g = 1/\rho$	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$	siemens por metro	S/m	$8{,}99 \cdot 10^9$ CGS

Flujo magnético	Φ	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$ (V·s)	weber	Wb	10^8 MKS
Inducción magnética	$B = \Phi/S$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$ (Wb/m²)	tesla	T	10^4 G
Intensidad del campo magnético	$H = In/l$	$m^{-1} \cdot A$	amperio por metro	A/m	$1{,}26 \cdot 10^{-2}$ Oe
Inductancia	$L = \Phi/I$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$ (Wb/A)	henry	H	10^9 CGS
Permeabilidad magnética absoluta	$\mu = B/H$	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	henry por metro	H/m	$7{,}96 \cdot 10^5$ CGS
Energía electromagnética	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	joule	J	10^7 ergio
Potencia activa	P	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	vatio	W	10^7 ergio/s

Magnitudes de iluminación y fotométricas de la emisión luminosa

Energía radiante (energía de radiación)	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	joule	J	10^7 ergio
Flujo radiante (potencia de radiación)	$P = W/t$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	vatio	W	10^7 ergio/s
Densidad del flujo radiante (intensidad de radiación)	$I = W/St$	$kg \cdot s^{-3}$	vatio por metro cuadrado	W/m^2	10^3 ergio/(s cm²)
Intensidad luminosa	$J_e = P/\omega$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot sr^{-1}$	vatio por estereorradián	W/sr	10^7 ergio/(s·sr)
Iluminación energética	$E_e = P/S$	$kg \cdot s^{-3}$	vatio por metro cuadrado	W/m^2	10^3 ergio/(s·cm²)
Brillo energético	$B_e = J_e/S$	$kg \cdot s^{-3} \cdot sr^{-1}$	vatio por estereorradián-metro cuadrado	$W/(sr \cdot m^2)$	10^3 ergio/(s·sr·cm²)
Energía luminosa	$Q = \Phi t$	s·cd·sr	lumen-segundo	lm s	1
Flujo luminoso	$\Phi = J\omega$	cd·sr	lumen	lm	1
Intensidad de iluminación	$E = \Phi/S$	m^2 cd sr·(lm/m²)	lux	lx	10^{-4} fot
Brillo luminoso	$B = J/S$	m^{-2} cd	candela por metro cuadrado	cd m²	10^{-4} sb

*) Para las unidades derivadas se exponen las fórmulas determinantes.
**) Expresada por medio de las unidades básicas y otras derivadas del SI.

II. Prefijos de múltiplos y submúltiplos en el SI

Factor	Nombre del prefijo	Símbolo	Factor	Nombre del prefijo	Símbolo
Múltiplo			*Submúltiplo*		
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	mili	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^{6}	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^{1}	deca	da	10^{-18}	atto	a

III. Principales fórmulas de electromagnetismo en SI y CGS

Nombre	SI	CGS
Ley de Coulomb (fuerza de interacción entre las cargas)	$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Fuerza que actúa sobre una carga en el campo eléctrico	$F = qE$	
Relación entre la intensidad del campo eléctrico y el desplazamiento	$D = \varepsilon_0 E$	$D = \varepsilon E$
Intensidad del campo eléctrico para una carga puntual	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$	$E = \frac{q}{r^2}$
Flujo de la intensidad del campo eléctrico a través de una superficie	$N = \sum E_n \Delta S$	
Trabajo para desplazar una carga en el campo eléctrico	$A = qU$	
Potencial del campo de una carga puntual	$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	$\varphi = \frac{q}{r}$
Capacidad eléctrica	$C = q/U$	
Capacidad del condensador plano con dieléctrico	$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$	$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$
Densidad de energía del campo eléctrico	$w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$	$w_e = \frac{E^2}{8\pi}$
Ley de Ohm	$I = U/R$	
Potencia de la corriente eléctrica	$P = IU$	

Nombre	SI	CGS
Ley de Joule—Lentz	$Q = I^2Rt$	
Flujo magnético	$\Phi = BS$	
Fuerza de interacción de dos corrientes paralelas en el vacío	$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2l}{r}$	$F = \frac{1}{c^2}\frac{2I_1I_2l}{r}$
Ley de Biot—Savart—Laplace	$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IM\operatorname{sen}\alpha}{r^2}$	$dB = \frac{1}{c}\frac{IM\operatorname{sen}\alpha}{r^2}$
Inducción del campo magnético de una corriente directa	$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$	$B = \frac{1}{c}\frac{2I}{r}$
Inducción del campo magnético en un solenoide	$B = \mu_0 In$	$B = \frac{4\pi}{c}In$
Flujo de inducción magnética	$\Phi_B = \Sigma B_n \Delta S$	
Ley de Ampère	$F = IBM\operatorname{sen}\alpha$	$F = \frac{1}{c}IBM\operatorname{sen}\alpha$
Fuerza de Lorentz	$F = qvB\operatorname{sen}\alpha$	$F = \frac{1}{c}qvB\operatorname{sen}\alpha$
Ley de inducción electromagnética	$\mathcal{E}_I = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\mathcal{E}_I = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_B}{dt}$
Relación entre campos alternativos eléctrico y magnético	$\mathcal{E}_B = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$	$\mathcal{E}_B = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_E}{dt}$
Inductancia	$L = \frac{U}{dI/dt}$	
Densidad de energía del campo magnético	$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$	$w_m = \frac{B^2}{8\pi}$
Fórmula de Thomson	$T = 2\pi\sqrt{LC}$	
Reactancia	$R_{LC} = \omega L - 1/\omega C$	

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.